Determinants

That object was to present the subject as a continuous chain of arguments, separated from all accessories of explanation or illustration, a form which I venture to think better suited for a treatise on exact science than the semi -colloquial semi-logical form often adopted by Mathematical writers.

Lewis Carroll (1867)

$\underline{d=2}$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \det(M) = ad - bc$

$$\det(MN) = \det M \det N$$

$$M \in M_2(A)^\times \Longleftrightarrow \det M \in A^\times$$

et alors $M^{-1} = (\det M)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

Formes Multilinéaires

Définition 11.1. *Soit V un K-espace vectoriel et $n \geqslant 1$ un entier. Une forme multilineaire en n variables sur V est une application*

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} V^n & \mapsto & K \\ (v_1, \cdots, v_n) & \mapsto & \Lambda(v_1, \cdots, v_n) \end{array}$$

telle que pour tout $i = 1, \cdots, n$ et tout choix de $n-1$ vecteurs $v_j \in V$, $j \neq i$, l'application "restriction a la i-ieme composante"

$$v_i \in V \mapsto \Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_n) \in K$$

est lineaire:

$$\Lambda(v_1, \cdots, \lambda.v_i + v_i', \cdots, v_n) = \lambda.\Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_n) + \Lambda(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_n).$$

L'ensemble des formes multilineaires en n variables sur V est note

$$\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K) \text{ *ou bien* } (V^*)^{\otimes n} (\text{*notation "produit tensoriel"*}).$$

$n=1$: $\Lambda : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & K \\ v_1 & \longrightarrow & \Lambda(v_1) \end{array}$ lineaire

$\Lambda \in V^*$

Exemples :

$V = K.$ $\quad \Lambda : K^n \longrightarrow K$

$\qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longrightarrow \Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Λ n'est <u>pas</u> une forme linéaire sur K^n

exemple : $\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

est une forme multilinéaire sur K

- $V = K^2 \quad n=2$

$$\bullet \cdot \bullet : \begin{array}{ccc} K^2 \times K^2 & \longrightarrow & K \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & \longrightarrow & x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \end{array}$$

produit scalaire euclidien.

est $n=2$-multilinéaire = bilinéaire

$n=3$ = trilinéaire

$n=4$ = quadrilinéaire

$\vdots$

$v_1 = (x_1, y_1) \quad v'_1 = (x'_1, y'_1) \in K^2 \quad v_2 = (x_2, y_2)$

$$(\lambda v_1 + v'_1) \cdot v_2 = \lambda v_1 \cdot v_2 + v'_1 \cdot v_2$$

- $v_2, v'_2 = (x'_2, y'_2)$

$$v_1 \cdot (\lambda v_2 + v'_2) = \lambda v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v'_2$$

$$(\lambda v_1 + v_1') \cdot (\mu v_2 + v_2')$$

$$= \mu(\lambda v_1 + v_1') v_2 + (\lambda v_1 + v_1') \cdot v_2'$$

$$= \lambda \mu v_1 \cdot v_2 + \mu v_1' \cdot v_2 + \lambda v_1 \cdot v_2' + v_1' \cdot v_2'$$

$\checkmark$

- $V = K^2$ $\quad n = 2$

$\cdot \wedge \cdot$ $K^2 \times K^2 \xrightarrow{\text{bilinéaire}} K$

$\cdot \wedge \cdot :$ $(v_1, v_2) \longrightarrow v_1 \wedge v_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2$

$\cdot \wedge \cdot$ est bilinéaire.

$$(\lambda v_1 + v_1') \wedge v_2 = (\lambda x_1 + x_1', \lambda y_1 + y_1') \wedge (x_2, y_2)$$

$$= (\lambda x_1 + x_1') \cdot y_2 - (\lambda y_1 + y_1') \cdot x_2$$

$$= \lambda x_1 y_2 + x_1' \cdot y_2 - (\lambda y_1 x_2 + y_1' x_2)$$

$$= \lambda (x_1 y_2 - y_1 x_2) + x_1' \cdot y_2 - y_1' x_2$$

$$= \lambda v_1 \wedge v_2 + v_1' \wedge v_2$$ et $\hat{m}$ linéaire en v_2.

Rmq

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Exemple General:

$$\Lambda : V^n \longrightarrow K$$

Soit $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$

$$\Lambda = \ell_1 \otimes \ell_2 \otimes \dots \otimes \ell_n : (v_1, v_2, \dots, v_n) \longrightarrow \ell_1(v_1)\ell_2(v_2)\dots\ell_n(v_n)$$

⚠ Notation

$$\ell_1 \otimes \ell_2 \otimes \dots \otimes \ell_n \neq \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \ldots \cdot \ell_n$$

$$\begin{aligned} \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \ldots \cdot \ell_n : \; V &\longrightarrow K \\ v &\longrightarrow \ell_1(v)\,\ell_2(v) \dots \ell_n(v) \end{aligned}$$

$\Lambda = l_1 \otimes \dots \otimes l_n$ est linéaire en $v_1, v_2, \dots v_n$

- v_1 : on fixe $v_2, v_3, \dots, v_n$ et on regarde

$$v_1 \longrightarrow \Lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) = l_1(v_1) \cdot l_2(v_2) \cdot \dots \cdot l_n(v_n)$$
$$= \pi \cdot l_1(v_1)$$

$\pi = l_2(v_2) \cdot \dots \cdot l_n(v_n) \in K$

$v_1 \longrightarrow \pi . \ell_1(v_1)$ est linéaire car ℓ_1 est linéaire.

⚠ si $n \geq 2$ $\quad v \longrightarrow (\ell_1 \cdot \ldots \cdot \ell_n)(v)$ n'est <u>pas</u> linéaire en v

$n=2 \quad \ell_1 \cdot \ell_2(\lambda v + v') = \ell_1(\lambda v + v') \cdot \ell_2(\lambda v + v')$

$$= \lambda^2 \ell_1 \cdot \ell_2(v) + \lambda \ell_1(v)\ell_2(v') + \lambda \ell_1(v')\ell_2(v_2)$$
$$+ \ell_1(v')\ell_2(v').$$

⚠ V^n et un K-ev.

$l_1 \otimes l_2 \otimes \dots \otimes l_n$ explique la notation

$$(V^*)^{\otimes n} = \underset{\substack{\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} \\ l_1}}{V^*} \otimes \underset{\substack{\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} \\ l_2}}{V^*} \otimes \dots \otimes \underset{\substack{\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} \\ l_n}}{V^*}$$

Proposition 11.1. *L'ensemble* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K) = (V^*)^{\otimes n}$ *des formes multilineaires en* n *variables est un* K*-espace vectoriel quand on le muni de l'addition et de la multiplication par les scalaires usuelle pour les fonctions a valeurs dans* K*:* $\forall \Lambda, \Xi \in (V^*)^{\otimes n}$

$$(\lambda\Lambda + \Xi)(v_1, \cdots, v_n) = \lambda\Lambda(v_1, \cdots, v_n) + \Xi(v_1, \cdots, v_n).$$

Preuve: exercice.

Théorème 11.1 (Dimension et base de l'espace des formes multilineaires). *Soit* $d = \dim V$, $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \subset V$ *une base et* $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ *la base duale. Alors* $V^{*\otimes n}$ *est de dimension finie egale a* d^n*; une base de* $V^{*\otimes n}$ *est donnee par l'ensemble des formes multilineaires de la forme*

$$\mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \text{ quand } j_1, \cdots, j_n \text{ parcourent } \{1, \cdots, d\}.$$

On note cette base

$$(\mathscr{B}^*)^{\otimes n} = \{\mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \ (j_1, \cdots, j_n) \in [1, d]^n\}.$$

Pour tout $\Lambda \in (V^*)^{\otimes n}$ *on a la decomposition*

$$\Lambda = \sum_{j_1, \cdots, j_n \leqslant d} \cdots \sum \Lambda(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots \mathbf{e}_{j_n}) \mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*$$

Preuve: $n = 2$.

$B=\{e_1,\dots,e_d\}\subset V \qquad B^*=\{e_1^*,\dots,e_d^*\}\subset V^*$

$$\begin{aligned}\Lambda : V\times V &\longrightarrow K\\ (v_1,v_2) &\longmapsto \Lambda(v_1,v_2)\end{aligned}$$

? Λ est CL des $\{e_1^*\otimes e_1^*,\ e_1^*\otimes e_2^*,\ \dots,\ e_1^*\otimes e_d^*,$
$e_2^*\otimes e_1^*,\ \dots$
$\vdots$
$e_d^*\otimes e_1^*,\ \dots\ e_d^*\otimes e_d^*\}$

$V = K^2 \qquad v_1 = (x_1, y_1) \quad v_2 = (x_2, y_2)$

$$\bullet \cdot \bullet : (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$= e_1^* \otimes e_1^* (v_1, v_2)$$

$$+ e_2^* \otimes e_2^* (v_1, v_2)$$

$$\bullet \wedge \bullet : (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

$$= e_1^* \otimes e_2^* (v_1, v_2) - e_2^* \otimes e_1^* (v_1, v_2)$$

$$v_1 = \sum_{j=1}^{d} x_{1j} e_j \qquad v_2 = \sum_{j=1}^{d} x_{2j} e_j$$

$$\Lambda(v_1, v_2) = \Lambda\left(\sum_{j=1}^{d} x_{1j} e_j, \sum_{k=1}^{d} x_{2k} e_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} x_{1j} \Lambda\left(e_j, \sum_{k=1}^{d} x_{2k} e_k\right)$$

$$\sum_{j=1}^{d} x_{1j} \sum_{k=1}^{d} x_{2k} \Lambda(e_j, e_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \Lambda(e_j, e_k) x_{1j} x_{2k}$$

$$x_{1j} x_{2k} = e_j^*(v_1) e_k^*(v_2)$$

$$= e_j^* \otimes e_k^* (v_1, v_2)$$

$\forall (v_1, v_2) \in V^2$

$$\Lambda(v_1, v_2) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \Lambda(e_j, e_k)\, e_j^* \otimes e_k^*(v_1, v_2)$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \Lambda(e_j, e_k)\, e_j^* \otimes e_k^*$$

$\{ e_j^* \otimes e_k^* \ (j,k) \in [1,d]^2 \}$ est generative de $(V^*)^{\otimes 2}$

Supposons que on ait

$$\Lambda = \sum_j \sum_k \lambda_{jk} e_j^* \otimes e_k^* = \underline{0}$$

Mq $\lambda_{jk} = 0 \quad \forall j, k.$?

$$\Lambda(e_{j_0}, e_{k_0}) = \sum_j \sum_k \lambda_{jk} e_j^*(e_{j_0}) \cdot e_k^*(e_{k_0})$$

$$e_j^*(e_{j_0}) = \delta_{j=j_0} \qquad e_k^*(e_{k_0}) = \delta_{k=k_0}$$

$$\Lambda(e_{j_0}, e_{k_0}) = \lambda_{j_0k_0} \cdot 1 \cdot 1 = \lambda_{j_0k_0} = 0$$

$n=2$ $\square$

Cas général : Λ forme multilinéaire en n variables

$$\Lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) = \, ?$$

$$i=1 \dots n \quad v_i = \sum_{j_i=1}^{d} x_{i j_i} e_{j_i}$$

$$\Lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{j_1=1}^{d} x_{1j_1} \Lambda(e_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{d} \sum_{j_2=1}^{d} \cdots \sum_{j_n=1}^{d} x_{1j_1} \cdot x_{2j_2} \cdot \dots x_{nj_n} \Lambda(e_1, e_2, \dots e_n)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{d} \sum_{j_2=1}^{d} \cdots \sum_{j_n=1}^{d} \Lambda(e_1, e_2, \dots e_n) \underbrace{x_{1j_1} \cdot x_{2j_2} \cdot \dots x_{nj_n}}_{\| \; e^*_{j_1} \otimes \dots \otimes e^*_{j_n}(v_1, v_2, \dots, v_n)}$$

$$x_{1j_1} \cdot x_{2j_2} \cdot \ldots \cdot x_{nj_n} = e^*_{j_1}(v_1) \cdot e^*_{j_2}(v_2) \cdots\cdots e^*_{j_n}(v_n)$$

$$= e^*_{j_1} \otimes e^*_{j_2} \otimes \cdots \otimes e^*_{j_n}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$\Lambda = \sum_{j_1=1}^{d} \sum_{j_2=1}^{d} \cdots \sum_{j_n=1}^{d} \Lambda(e_1, e_2, \ldots e_n) \cdot e^*_{j_1} \otimes e^*_{j_2} \otimes \cdots e^*_{j_n}.$$

pour mq la famille est libre on se donne

$$\lambda_{\bullet} : \{1, 2, \dots, d\}^n \longrightarrow K$$

$$\vec{j} = (j_1, \dots, j_n) \longrightarrow \lambda_{\vec{j}} = \lambda_{j_1, \dots, j_n}$$

tq $\Lambda = \sum_{\vec{j} \in \{1, \dots, d\}^n} \lambda_{\vec{j}} \, e^*_{j_1} \otimes \dots \otimes e^*_{j_n} = \underline{0}$

pour $\vec{j_0} = (j_{01}, \dots, j_{0n}) \in \{1, \dots, d\}^n$

on calcule

$$\Lambda(e_{j_{01}}, \dots, e_{j_{0n}}) = \sum_{\vec{j}=(j_1,\dots,j_n)} \lambda_{\vec{j}}\, e^*_{j_1} \otimes \dots \otimes e^*_{j_n} (e_{j_{01}}, \dots, e_{j_{0n}})$$

$$e^*_{j_1} \otimes \dots \otimes e^*_{j_n}(e_{j_{01}}, \dots, e_{j_{0n}}) = \delta_{j_1 = j_{01}} \cdot \delta_{j_2 = j_{02}} \cdot \dots \cdot \delta_{j_n = j_{0n}}$$

$$\forall\, \vec{j_0} = (j_{01}, \dots, j_{0n}) \in \{1, \dots, d\}^n$$

$$\Lambda(e_{j_{01}}, \dots, e_{j_{0n}}) = 0 = \lambda_{\vec{j_0}} = \lambda_{(j_{01}, \dots, j_{0n})}$$

$$\square$$

Rmq: Multilinéaire vs lineaire

$V^{*\otimes n}$ $\qquad\qquad$ $(V^n)^*$

une fome multilineaire sur V n'est une forme lineaire sur V^n

$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$

$\ell(\lambda \vec{v} + \vec{v}') = \lambda \ell(\vec{v}) + \ell(\vec{v}')$

$$\ell(\lambda v_1 + v'_1, \lambda v_2 + v'_2, \dots, \lambda v_n + v'_n)$$
$$= \lambda \ell(v_1, v_2 \quad v_n) + \ell(v'_1, v'_2 \dots, v'_n)$$

$$\Lambda(\lambda v_1 + v'_1, \lambda v_2 + v'_2, \dots, \lambda v_n + v'_n)$$

= une somme de 2^n termes et un polynome en λ de d° n

$$= \lambda^n \Lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) + \lambda^{n-1} \Lambda(\quad) \dots$$

$$\Lambda(\lambda_1 v_1 + v_1', \lambda_2 v_2 + v_2', \dots, \lambda_n v_n + v_n') = \dots$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pas forcement egaux

Formes Symetriques / Alternées

$$\Lambda : (v_1, \dots, v_n) \longmapsto \Lambda(v_1, \dots, v_n)$$

on fabrique une nouvelle forme en posant

$$\Lambda_{12} : (v_1, \dots v_n) \longmapsto \Lambda(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n)$$

si $i, j \in \{1, \dots, d\}$

on forme la forme Λ_{ij} en permutant v_i et v_j

$$\Lambda_{ij}(v_1, \dots, v_i, \dots v_j, \dots v_n) := \Lambda(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots v_n)$$

les Λ_{ij} $i,j \in \{1, \dots, d\}$ sont des nouvelles formes multilineaire obtenues par permutation de 2 variables.

Définition 11.2. *Une forme multilineaire*

$$\Lambda : V^n \mapsto K$$

est dite

- *Symetrique si* $\forall i \neq j \leqslant n$

$$\Lambda_{ij} = (ij).\Lambda = \Lambda$$

c'est a dire $\forall (v_1, \cdots, v_n) \in V^n$, *on a*

$$\Lambda(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_n) = \Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_n).$$

Autrement dit si la valeur de Λ *ne change pas quand on echange deux composantes.*

- *Alternee si* $\forall i \neq j \leqslant n$

$$(ij).\Lambda = -\Lambda$$

c'est a dire $\forall (v_1, \cdots, v_n) \in V^n$, *on a*

$$\Lambda(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_n) = -\Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_n).$$

Autrement dit si sa valeur est changee en son opposee si on echange deux composantes distinctes.

$V = K^2$

- $v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_2 x_1 + y_2 y_1$

$$= v_2 \cdot v_1$$

$\cdot . \cdot$ est symetrique

- $v_1 \wedge v_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2 = -(x_2 y_1 - y_2 x_1)$

$$= -v_2 \wedge v_1$$

$\wedge$ est alternée.

L'ensemble des formes multilineaires symetriques en n variables sur V est note

$$\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K).$$

L'ensemble des formes multilineaires alternees en n variables sur V est note

$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K).$$

PROPOSITION 11.2. *Les ensembles* $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$ *et* $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ *sont des SEV de l'espace vectoriel* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$.

<u>Exercice :</u>

$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$

$\Lambda_{ij} = \pm\Lambda$

± 1 et pas 2 ou 3 ?

si $\Lambda_{ij} = 2\Lambda$

$(\Lambda_{ij})_{ij} = \Lambda = 2\Lambda_{ij} = 4\Lambda$.

Permutation et Signature

Action par permutation sur n-variables

la transformation

$$(v_1 \quad v_i \quad v_j \quad v_n) \to (v_1 \dots v_j \dots v_i \dots v_n)$$

est une transposition sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ des indices qui identifient les n variable.

$\sigma \in \mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, 2, \dots, n\})$

a m forme multilinéaire Λ on associe une nouvelle

$$\sigma\Lambda : (v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \Lambda(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

si $\tau = (ij)$ $\quad \tau.\Lambda = \Lambda_{ij}$

$\Longrightarrow$ Action $\mathfrak{S}_n \curvearrowright (V^*)^{\otimes n}$

Théorème 11.2 (Action par permutation sur les formes multilineaires). *Pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, *l'application*

$$\sigma.\bullet : \Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V,K) \mapsto \sigma.\Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$$

definit un automorphisme du K*-ev* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$.

Plus precisement, l'application

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \sigma.\bullet \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)) \subset GL(V^{*\otimes n})$$

verifie

- *Soit* Id_n *la permutation triviale. On a* $\forall \Lambda$, $\mathrm{Id}_n.\Lambda = \Lambda$ *autrement dit*

$$\mathrm{Id}_n.\bullet = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)}.$$

- $\forall \Lambda$, $\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, *on a*

$$(\sigma \circ \tau).\Lambda = \sigma.(\tau.\Lambda)$$

  autrement dit

$$(\sigma \circ \tau).\bullet = (\sigma.\bullet) \circ (\tau.\bullet) = \sigma.(\tau.\bullet).$$

  En particulier, pour tout σ

$$(\sigma.\bullet) \circ (\sigma^{-1}.\bullet) = \mathrm{Id}_n.\bullet = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)}$$

  et donc $\sigma.\bullet$ *est un automorphisme lineaire de* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$ *de reciproque* $\sigma^{-1}.\bullet$.

Ainsi

$$\sigma \mapsto \sigma.\bullet$$

definit une action a gauche $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$ *par automorphismes lineaires.*

Preuve : $(\sigma \circ \tau).\Lambda = \sigma.(\tau.\Lambda)$

$$\sigma.\underbrace{(\tau.\Lambda)}_{=\Lambda'}(v_1, \dots, v_n) = \underbrace{\tau.\Lambda}_{=\Lambda'}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

on pose $w_i = v_{\sigma(i)}$

$$\tau.\Lambda(w_1, \dots, w_n) = \Lambda(w_{\tau(1)}, w_{\tau(2)}, \dots, w_{\tau(n)})$$

$$= \Lambda(v_{\sigma(\tau(1))}, v_{\sigma(\tau(2))}, \dots, v_{\sigma(\tau(n))})$$

$$= (\sigma \circ \tau).\Lambda(v_1, \dots, v_n) \qquad \square$$

Signature le gpe $\mathfrak{S}_n$ possede un unique morphisme non-trivial

$$\mathrm{sign} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$\sigma \longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) \in \{\pm 1\}$$

$\forall \tau$ une transposition $\tau = (i\,j)$ $i \neq j \leq n$

$\mathrm{sign}(\tau) = -1$.

si $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \quad \circ \tau_k$ τ_i des transposition

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{sign}(\tau_i) = (-1)^k$$

Théorème 11.3. *Les formes multilineaires alternees* $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ *(resp. symetriques* $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$*) sont exactement les formes multilineaires verifiant*

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma.\Lambda = \mathrm{sign}(\sigma)\Lambda \text{ (resp. } \sigma.\Lambda = \Lambda). \tag{11.1.1}$$

__Preuve :__ si Λ verifie $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \sigma.\Lambda = \mathrm{sign}(\sigma).\Lambda$

Λ est alternée en prenant pour σ une transp quelconque.

— si Λ est tq $\forall \tau$ transp $\tau.\Lambda = -\Lambda$

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$

$\sigma \Lambda = \tau_1 \circ \quad \circ \tau_{k-1}(\tau_k \Lambda) = -\tau_1 \circ \dots \circ \tau_{k-1}\Lambda$

$$\vdots$$

$$\sigma \Lambda = (-1)^k \Lambda = \mathrm{sign}(\sigma)\Lambda.$$

On fait pareil pour le cas symetrique.

$$(\sigma \Lambda = \Lambda)$$

$\square$

Dimension de l'espace des formes alternée

THÉORÈME 11.4 (Dimension des espaces de formes alternees). *On suppose que* $\mathrm{car}(K) \neq 2$. *Soit* $d = \dim V$. *On a*

$$\dim \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) = \begin{cases} 0 & si\ n > d \\ 1 & si\ n = d \\ C_d^n\ si\ n \leqslant d \end{cases}$$

Rmq: $\mathrm{Car}\, K = 2$. $-1_K = 1_K \quad 2_K = 0_K$

si Λ verifie $\sigma . \Lambda = \mathrm{sign}(\sigma) . \Lambda$

$$= \pm 1 . \Lambda$$

$$= \pm 1_K . \Lambda = \Lambda$$

les formes alternée et symetrique sont confondues par exemple : pour $V = K^2$

$\bullet \cdot \bullet = e_1^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_2^*$ est symetrique et alterne

$\bullet \wedge \bullet = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$

$= e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*$ est symetrique et alterné !

$\dim \mathrm{Alt}^{(2)}(K^2) \geq 2$

Preuve (1ère partie) $n \geq d$

Rmq generale: si Λ est alternée

$$\Lambda(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots v_n) = 0$$

en effet on a

$$\Lambda(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots v_n) = -\Lambda(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots v_n)$$

$$2\Lambda(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots v_n) = 0$$

car $\mathrm{Car}\, K \neq 2$.

Si $n > d$ et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de V les vecteurs sont liés, il existe un vecteur qui est CL les autres.

Supposens

$$v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$$

$$\Lambda\left(v_1, v_2, \quad v_{n-1}, \overbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}}^{v_n}\right)$$

$$= \lambda_1 \Lambda(v_1, v_2, \dots, v_1) + \lambda_2 \Lambda(v_1, v_2, \dots, v_2)$$

$$+ \dots + \lambda_{n-1} \Lambda(v_1, v_2 \quad v_{n-1}, v_{n-1}) = 0$$

Si Λ est alternée a n variable

pour que $\Lambda(v_1, \dots v_n)$ soit $\neq 0$ il

faut que $\{v_1, \dots, v_n\}$ soit libre.

$\Longrightarrow \quad n \leqslant d.$

Montrons que si $n = d$ $\dim \mathrm{Alt}^{(d)}(V) \leq 1$

$B = \{e_1, \dots, e_d\}$ = base de V

$\Lambda(v_1, \dots v_d) = ?$

$$v_i = \sum_{j=1}^{d} x_{ij} e_j$$

$$\Lambda(v_1, \dots, v_n) = \sum_{j_1=1}^{d} \sum \dots \sum_{j_d=1}^{d} x_{1j_1} \cdot x_{2j_2} \cdot \dots x_{dj_d} \Lambda(e_{j_1}, \dots e_{j_d})$$

$\Lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_d}) = 0$ si il existe $i \neq i'$ tq $e_{j_i} = e_{j_{i'}}$

la somme est restreinte aux indices $(j_1, \dots, j_d)$ qui sont tous distincts et qui varient entre 1 et d

$(j_1, \dots, j_d)$ est en fait une permutation de $(1, 2, \dots, d)$

et donc chacun des termes qui survivent a un multiindice

$(j_1, \dots, j_d) = (\sigma(1), \dots, \sigma(d))$ pour σ une permutation de $\{1, \dots, d\}$

$$\Lambda(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(d)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \Lambda(e_1, \dots, e_d)$$

$\Longrightarrow$ les valeurs de Λ sont entièrement determinée dès qu'on connait $\Lambda(e_1, \dots, e_d)$

Cela montre que $\dim \mathrm{Alt}^{(d)}(V) \leq 1$

et pour montrer l'égalité il faut trouver

Λ tq $\Lambda(e_1, \dots, e_d) \neq 0$.

$n = d$: Construction d'une forme alternée

Symetrisation:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f est paire si $f(-x) = f(x)$

f est impaire si $f(-x) = -f(x)$

Soit f quelconque : alors $f_+(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ est paire

$f_-(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ est impaire

$$f_+(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_+(x)$$

$$f_-(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

et $f = f_+ + f_-$

Théorème 11.5 (Processus de symetrisation pour l'action d'un groupe fini). *Soit K un corps, $(G,.)$ un groupe fini, V un K-ev de dimension finie et*

$$\iota : G \mapsto \mathrm{GL}(V)$$

un morphisme de groupe de G vers le groupe des automorphismes de V. Soit

$$\chi : G \mapsto (K^\times, \times)$$

un morphisme de G vers le groupe multiplicatif de K (on dit que χ est un caractere de G a valeurs dans $K^\times$). Soit $v \in V$, alors le vecteur

$$v_\chi := \sum_{h \in G} \chi(h)^{-1}.\iota(h)(v)$$

verifie pour tout $g \in G$

$$\iota(g)(v_\chi) = \chi(g).v_\chi.$$

Ex : $\chi = \underline{1}$

$$V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad G = \{\pm 1\} \ni \varepsilon$$

$$\varepsilon . f : x \longrightarrow f(\varepsilon . x)$$

$$\chi_0 : \{\pm 1\} \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, \times) \qquad \chi_0 = 1$$
$$\varepsilon \longrightarrow 1$$

$$f_1 = 1 . f + 1 . (-1) . f = f(x) + f(-x)$$

$$(-1) . f_1 = f_1 \qquad \text{et paire}$$

$\chi : \varepsilon \in \{\pm 1\} \longrightarrow \varepsilon \in \mathbb{R}^*$

$f_\chi = \chi(1) \cdot 1 \cdot f + \chi(-1) \cdot (-1) \cdot f$

$f_\chi(x) = f(x) + (-1) \cdot f(-x)$

$= f(x) - f(-x)$ impaire.

$(-1) \cdot f = -f$

Preuve: $g \in G$ $\quad i(g) \in GL(V)$

si $v \in V$ $\quad i(g)(v) =: g \bullet v$

$\chi : G \longrightarrow K^\times$

$$v_\chi = \sum_{h \in G} \chi(h)^{-1} \cdot h \bullet v$$

$$g \bullet v_\chi = g \bullet \left(\sum_{h \in G} \chi(h)^{-1} \cdot h \bullet v \right)$$

$$= \sum_{h \in G} \chi(h)^{-1} \cdot g \bullet (h \bullet v)$$

$$= \sum_{h \in G} \chi(h)^{-1} (g \cdot h) \bullet v$$

$h' = g \cdot h$

$h = g^{-1} \cdot h'$

$$= \sum_{h' \in G} \chi(g^{-1} \cdot h')^{-1} h' \bullet v$$

$$\chi(g^{-1} \cdot h')^{-1} = \left(\chi(g)^{-1} \cdot \chi(h')\right)^{-1} = \left(\chi(g)^{-1}\right)^{-1} \chi(h')^{-1}$$

$$g \bullet v_\chi = \sum_{h' \in G} \chi(g)\, \chi(h')^{-1} \cdot h' \bullet v$$

$$= \chi(g) \sum_{h' \in G} \chi(h')^{-1} h' \bullet v$$

$$= \chi(g) \cdot v_\chi$$

COROLLAIRE 11.1. *Soit Λ une forme multilineaire en n variables sur V alors*

$$\Lambda_{\text{sign}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma)\sigma.\Lambda$$

est alternee.

<u>Preuve</u> : on applique le Thm de symetrisation

a "V" $= \mathrm{Alt}^{(n)}(V)$

$G = \mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathrm{Alt}^{(n)}(V)$

$$\chi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$\sigma \longrightarrow \text{sign}(\sigma)$$

$$\Lambda_{sign} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)^{-1} \cdot \sigma \cdot \Lambda$$

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \pm 1 \qquad \mathrm{sign}(\sigma)^{-1} = \mathrm{sign}(\sigma)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \mathrm{sign}(\sigma)\, \sigma \cdot \Lambda$$

et par le thm

$$\forall \tau \in \mathfrak{S}_n \quad \tau \cdot \Lambda_{sign} = \mathrm{sign}(\tau) \cdot \Lambda_{sign}$$

Determinant

Soit $B = \{e_1, \dots, e_d\}$ une base de V

$\Lambda = e_1^* \otimes \dots \otimes e_d^*$ alors la forme alternée

$\Lambda_{sign} = (e_1^* \otimes \ \otimes e_d^*)_{sign}$ s'appelle le détermi
nant

de V dans la base B $\det_B$

$\det_B : (v_1, \dots, v_d) \longrightarrow \det_B(v_1, \dots, v_d$