EPFL Automne 2022
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 12

Pour cette series et la suivante il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Sauf mention explicite du contraire, on suppose que le corps de base K est de caracteristique $\neq 2$ de sorte que $1_K \neq -1_K$.

Formes multilineaires/symetriques/alternees

On note $\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K)$ l'espace des formes multilineaires en n variables sur V a valeurs dans K et on note $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ et $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ les sous-ensembles des formes symetriques et alternees.

Exercice 1. Montrer les fait suivants (certains etaient enonces en cours)

1. Montrer que $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(V^n, K)$ (l'espace des fonctions de V^n a valeurs dans K) quand on munis ce dernier de sa structure usuelle de K-EV.
2. Montrer que pour $\lambda, \in K$
$$\Lambda(\lambda.v_1, \cdots, \lambda.v_n) = \lambda^n.\Lambda(v_1, \cdots, v_n).$$
3. Montrer que pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$
$$\Lambda(\lambda_1.v_1, \cdots, \lambda_n.v_n) = \lambda_1. \cdots .\lambda_n.\Lambda(v_1, \cdots, v_n).$$

Exercice 2. Les notations comme ci-dessus

1. Montrer que $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ et $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ sont des SEVs de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$.
2. Montrer que sur $\mathrm{car}K \neq 2$,
$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K) \cap \mathrm{Sym}^{(n)}(V; K) = \{\underline{\mathbf{0}}_K\}$$
(ie. ils sont en somme directe).
3. Montrer que si $\mathrm{car}K = 2$,
$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K) = \mathrm{Sym}^{(n)}(V; K).$$

Exercice 3. Soit $\varphi : V \mapsto V$ une application lineaire. Pour toute forme multilineaire Λ en n variables, on definit

$$\varphi^*(\Lambda) : (v_1, \cdots, v_n) \mapsto \Lambda(\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n)).$$

1. Montrer que $\varphi^*(\Lambda)$ est multilineaire, alternee ou symetrique si Λ l'est.
2. On suppose que $n = d = \dim V$ alors on sait que l'espace des formes alternees $\mathrm{Alt}^{(d)}(V; K)$ est de dimension 1 et engendre par une forme alternee non-nulle Λ_0. Montrer qu'il existe un scalaire $\det \varphi \in K$ tel que
$$\varphi^*(\Lambda_0) = \det \varphi.\Lambda_0.$$
3. Montrer que pour toute forme alternee (en d variables) Λ on a
$$\varphi^*(\Lambda) = \det \varphi.\Lambda.$$

Le scalaire $\det \varphi$ est appelle le determinant de φ.

Action par permutations

Exercice 4 (Rappels sur le groupe symetrique)**.** Soit $n \geqslant 1$ et $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, \cdots, n\})$ le groupe des permutations de n elements. On rappelle qu'il existe un morphisme de groupes (la signature) non-trivial (qui n'est pas constant egal a 1)

$$\mathrm{sign} : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

On va montrer que c'est le seul.

1. Soit G un groupe et $\varphi : G \mapsto C$ un morphisme vers un groupe commutatif C. Montrer que pour tout $g, h \in G$ on a
$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h).$$
2. Soit $s : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}$ un morphisme non-trivial ; montrer qu'il existe une transposition τ telle que $s(\tau) = -1$.
3. Montrer que pour toute transposition τ' on a $s(\tau') = -1$ et que $s = \mathrm{sign}$.
4. Montrer que
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) = 0.$$
Pour cela on pourra considerer une transposition τ et faire le changement de variable $\sigma \leftrightarrow \sigma\tau$ dans la somme ci-dessus pour montrer qu'elle s'annule.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 1$ et $\sigma : \{1, \cdots, n\} \mapsto \{1, \cdots, n\}$ une permutation de $\{1, \cdots, n\}$.

1. Montrer que
$$\sigma.\bullet_{:} \Lambda \mapsto \sigma.\Lambda$$
definie par
$$\sigma.\Lambda : (v_1, \cdots, v_n) = \Lambda(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)})$$
est une application lineaire de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$ sur $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$.
2. Montrer que $\sigma.\bullet$ envoie le sous-espace $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ sur $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ et $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ sur $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ (quelque soit la signature de σ).
3. Soient $l_1, \cdots, l_n : V \mapsto K$ des forme lineaires (pas forcement distinctes) montrer que
$$\sigma.(l_1 \otimes \cdots \otimes l_n) = l_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes l_{\sigma^{-1}(n)}$$
ou σ^{-1} est la permutation reciproque.

Symetrisation

Dans le cours on a vu l' endomorphisme de symetrisation de l'espace $\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K)$:

$$\bullet_{\mathrm{sign}} : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \sigma.\Lambda$$

qui permet de produire une forme alternee : il correspond a l'action du groupe $\mathfrak{S}_n \circlearrowright \mathrm{Mult}^{(n)}(V, K)$ par permutation des variables et au morphisme

$$\mathrm{sign} : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

On definit egalement
$$\bullet_1 : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma.\Lambda$$
correspondant au morphisme trivial

$$1 : \mathfrak{S}_n \mapsto 1.$$

Exercice 6. On suppose $n = 2$ et soit V un EV de dimension $d \geqslant 2$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$.

1. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\mathrm{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de forms lineaires ?
2. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_{\mathrm{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de forms lineaires ?

Exercice 7. On suppose $n = 3$ et soit V un EV de dimension $d \geqslant 3$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$.

1. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de forms lineaires ?
2. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de forms lineaires ?

Exercice 8. Soit V un EV de dimension $d = 2$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Soient v_1, v_2 deux vecteurs de coordonnees

$$v_i = \sum_{j=1}^{2} x_{ij} \mathbf{e}_j.$$

1. Exprimer $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\mathrm{sign}}(v_1, v_2)$ en fonction des $(x_{ij})_{i,j \leqslant 2}$

Exercice 9. Soit V un EV de dimension $d = 3$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Soient v_1, v_2, v_3 deux vecteurs de coordonnees

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \mathbf{e}_j.$$

1. Exprimer $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}}(v_1, v_2, v_3)$ en fonction des $(x_{ij})_{i,j \leqslant 3}$.

Exercice 10. On consider le cas n general.

1. Montrer que $\bullet_1$ envoie $\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K)$ sur $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ (on a vu dans le cours que $\bullet_{\mathrm{sign}}$ envoie $\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K)$ sur $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$).
2. Montrer que $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_{\mathrm{sign}}$ et que $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_1$ (utiliser l'exercice 4).
3. Calculer Λ_{sign} si Λ est alternee.
4. Calculer Λ_1 si Λ est symetrique.

Matrices de permutation

Exercice 11. Soit V un K-ev de dimension d et $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V fixee. Soit $\sigma : \{1, \cdots, d\} \mapsto \{1, \cdots, d\}$ une permutation. On lui associe l'unique application lineaire φ_σ qui envoie chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ sur le vecteur $\mathbf{e}_{\sigma(i)}$ pour $i \leqslant d$:

$$\text{si } v = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_d \mathbf{e}_d \text{ alors } \varphi_\sigma(v) = x_1 \mathbf{e}_{\sigma(1)} + \cdots + x_d \mathbf{e}_{\sigma(d)}.$$

1. Quand $n = 2, 3$ donner les matrices M_σ des φ_σ calculees dans la base $\mathscr{B}$ (ces matrices sont appellees matrices de permutations).

2. Par echalonement-reduction montrer que $M_{(123)}$ est inversible et que son inverse est une matrice de permutation.
3. En general montrer (sans calculs) que φ_σ est inversible et calculer son inverse.
4. Montrer que $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ defini un morphisme de groupes injectif de $\mathfrak{S}_d$ vers $\mathrm{GL}(V)$. L'image s'appelle le groupe des matrices de permutations (associees a la base $\mathscr{B}$).
5. Que vaut $\varphi_\sigma^*(\mathbf{e}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_d^*)$ (montrer que c'est un produit tensoriel de formes lineaires explicites) ?
6. Montrer que $\det(\varphi_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$ (voir l'exercice 3 pour le definition de det et des proprietes utiles).

Remarque. On rappelle que tout groupe fini G peut est realise comme (ie. par injection dans) un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_{|G|}$. Cet exercice montre donc que tout groupe fini peut etre realise comme un sous-groupe du groupe des d'applications lineaires inversibles $\mathrm{GL}(V)$ (d'un espace vectoriel de dimension $d = |G|$). On appelle cela la *linearisation* : cela permet de ramener certaines questions de la theorie des groupes finis a des questions d'algebre lineaire.