Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
13 janvier 2020
3 heures

n/a

n/a

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages (les dernières pouvant être vides), et 31 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  +3 points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  +1 point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $I = \displaystyle\int_0^2 \exp(x^2)\,\mathrm{d}x$. Alors

- ☐ $2 \leq I \leq 200$
- ☐ $I = \exp\left(\frac{8}{3}\right) - 1$
- ☐ $0 \leq I < \frac{14}{3}$
- ☐ $I \geq 200$

Question 2 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\,\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right) & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Alors

- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable à droite mais pas à gauche en $x = 0$.
- ☐ f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable à gauche mais pas à droite en $x = 0$.

Question 3 : Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors

- ☐ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais ne converge pas absolument.
- ☐ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- ☐ les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ convergent.
- ☐ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverge.

Question 4 : Soit R le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^b)} x^n$.

- ☐ Si $b = 2$, alors $R = 1$.
- ☐ Si $b = 1$, alors $R = e^{-1}$.
- ☐ Si $b = 3$, alors $R = e$.
- ☐ Si $b = 4$, alors $R = e^2$.

Question 5 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x\cos(x)|$.

- ☐ Il existe $u \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ☐ f est croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- ☐ Sur $\mathbb{R}$, f possède un unique point de minimum local.
- ☐ Il existe $u \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$ tel que $f'(u) = 0$.

Question 6 : Parmi les fonctions $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sh}(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\mathrm{Arctg}(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ x\,\mathrm{Log}(|x|) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

déterminer celles qui sont continues en $x = 0$:

☐ g et h ☐ f et g ☐ toutes les trois ☐ f et h

Question 7 : Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{Log}(1+x)\,\mathrm{d}x$. Alors

☐ $I = 2\,\mathrm{Log}(3) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(2)$ ☐ $I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(2) + \frac{1}{4}$

☐ $I = 2\,\mathrm{Log}(3) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(2)$ ☐ $I = \frac{3}{2}\,\mathrm{Log}(3) - \frac{1}{4}$

Question 8 : Soit $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\mathrm{Arctg}(\sqrt{x}\,))$. Alors l'ensemble image de f est égal à

☐ $]0, 1]$ ☐ $[-1, 1]$ ☐ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ ☐ $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

Question 9 : Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (ax+1)(bx-1) & \text{si } x \geq 0, \\ \sin(a^2x) - b & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est-elle dérivable en $x = 0$?

☐ $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ et $b = -1$ ☐ $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ et $b = 1$

☐ $a = \pm 1$ et $b = -1$ ☐ $a = \pm 1$ et $b = 1$

Question 10 : La partie imaginaire de $\left(-1 + i\sqrt{3}\,\right)^5$ est

☐ $16\sqrt{3}$ ☐ $-16\sqrt{3}$ ☐ $32\sqrt{3}$ ☐ $32\sqrt{3}\,i$

Question 11 : La limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5n + \sqrt{3n - \sqrt{2n}}}}$

☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3-\sqrt{2}}}}$ ☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{5}}$

☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ☐ n'existe pas

Question 12 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

☐ $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x)$

Question 13 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie ainsi: pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Alors

☐ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -2$

☐ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$

☐ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$

☐ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Question 14 : La série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^{\frac{2}{\alpha}}\left(n^{2\alpha}+1\right)}}$ converge si

☐ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

☐ $\alpha = \frac{1}{2}$

☐ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

☐ $1 < \alpha < 2$

Question 15 : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{3^n}$. Alors

☐ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x_0.

☐ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

☐ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x_0 - \frac{3}{2}$.

☐ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est divergente.

Question 16 : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^{3/2}+3}{x^3}\,dx$

☐ diverge

☐ converge et vaut $-\frac{7}{2}$

☐ converge et vaut $\frac{8}{3}$

☐ converge et vaut $\frac{7}{2}$

Question 17 : Soit $A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \,:\, \dfrac{1}{\mathrm{Log}(x)} < 1\right\}$. Alors

☐ $\mathrm{Inf}\, A = 0$

☐ A n'est pas minoré

☐ $\mathrm{Sup}\, A = \mathrm{e}$

☐ $\mathrm{Inf}\, A = \mathrm{e}$

Question 18 : Soit $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$, et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour un $x_0 \in \mathbb{R}^*$ fixé.

- ☐ Si $x_0 = -2$, la suite converge vers $-\sqrt{2}$.
- ☐ Si $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la suite converge vers $-\sqrt{2}$.
- ☐ Si $x_0 = 1$, la suite converge vers $-\sqrt{2}$.
- ☐ Il n'existe aucun $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pour lequel la suite converge vers $-\sqrt{2}$.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors f est continue en exactement deux points.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Une fonction strictement croissante $f : [0,1] \to [0,1]$ est toujours bijective.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (3x)^k$ vaut 3.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)\,.$$

Alors f est dérivable à gauche en x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en x_0, alors la fonction $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(f(x))$ est également dérivable en x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et bornée, et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n le réel défini par $a_n = f(n)$. Alors $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, il existe une infinité de nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Im}(\omega z) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction bijective et continue, telle que $f(0) = 0$. Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 dont le développement limité d'ordre 2 autour de $x_0 = 0$ est donné par $f(x) = 1 + 2x + x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$. Alors la fonction $(f(x))^2$ admet le développement limité $(f(x))^2 = 1 + 4x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ autour de $x_0 = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

(a) (2pt) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Définir ce qu'est l'*ensemble des fonctions continûment dérivables sur* I, noté $C^1(I)$.

(b) (4pts) Soit $f\colon \,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctg}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in \,]0,1[\,, \\ \frac{\pi}{2} - x & \text{si } x \in \,]-1,0]\,. \end{cases}$$

Montrez que $f \in C^1(]-1,1[)$.

Question 30: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 *Réservé au correcteur*

(a) (2pt) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x \, dx$.

(b) (2pt) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x^2)^x$.

Question 31: *Cette question est notée sur 6 points.*

0 1 2 3 4 5 6 *Réservé au correcteur*

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série absolument convergente.

(a) (2pts) Montrez que $\lim_{n\to\infty} \big(a_{2n} + a_{2n+1} + \cdots + a_{3n-1} + a_{3n}\big) = 0$.

(b) (4pts) En justifiant soigneusement votre raisonnement (en particulier, en *énonçant* précisément les résultats généraux dont vous pourriez avoir besoin), montrez que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n e^{a_n}$ est aussi absolument convergente.