Examen final - Salle CE 4 - 16h15 à 19h15

Nom: .... **Prénom:** .... **Section:** ....

- Vous pouvez répondre aux questions en Francais ou en Anglais.
- Ecrivez votre nom sur chaque feuille double, rendez la donnée et tous les brouillons SVP. Vous devez impérativement rendre votre copie.
- Il y a 5 problèmes à résoudre: vous pouvez choisir dans quel ordre vous les résolvez.

Problème 1: Expérience avec un cristal biréfringent. (24 points)

On veut modéliser l'expérience suivante faites avec des photons. Dans cette expérience les états des photons sont décris par l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\rm pol} \otimes \mathcal{H}_{\rm orb}$ avec $\mathcal{H}_{\rm pol} = \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{H}_{\rm orb} = \mathbb{C}^2$. $\mathcal{H}_{\rm pol}$ est l'espace des états de polarization de base orthonormale $|x\rangle$, $|y\rangle$ (polarisation horizontale et verticale). $\mathcal{H}_{\rm orb}$ décrit l'état orbital (la trajectoire du photon) comme superposition des deux états orthonormaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Les états $|1\rangle$ (resp. $|2\rangle$) correspondent aux trajectoirs inférieure (resp. supérieure) sur la *figure (voir page 2).*

Les photons sont envoyés un par un vers un cristal biréfringent. A la sortie du cristal, l'état de polarization horizontal $|x\rangle$ emprunte le chemin inférieur et l'état de polarization vertical $|y\rangle$ emprunte le chemin supérieur. Ensuite, un déphaseur agit uniquement sur la trajectoire supérieure *(voir figure page 2).* Finalement les deux trajectoires sont recombinées par un second cristal biréfringent (symétrique du premier) et les photons ressortent le long de la trajectoire inférieure.

On place un analyseur orienté le long de l'angle α avec un photodétecteur pour effectuer des mesures de la polarization sur les photons sortants.

On suppose que l'état entrant des photons est $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x\rangle + |y\rangle\big) \otimes |1\rangle$. Le premier cristal biréfringent agit comme

$$U|x\rangle \otimes |1\rangle = |x\rangle \otimes |1\rangle, \qquad U|y\rangle \otimes |1\rangle = |y\rangle \otimes |2\rangle$$

Le déphaseur agit sur l'état orbital comme

$$D(\varphi)|1\rangle = |1\rangle, \qquad D(\varphi)|2\rangle = e^{i\varphi}|2\rangle$$

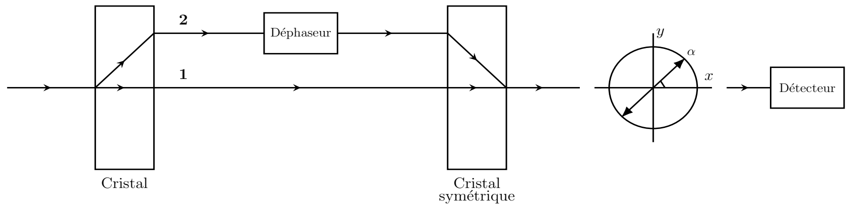
(a) Comment agit le deuxième cristal (symmétrique) sur les états $|x\rangle \otimes |1\rangle$ et $|y\rangle \otimes |2\rangle$?

(b) Calculez l'état du photon: (i) juste après le premier cristal, (ii) juste après le déphaseur, (iii) juste après le deuxième cristal.

(c) Calculez la probabilité que le photodétecteur clique en fonction de α et φ. On rappelle que si l'analyseur est orienté long de l'angle α, la base de mesure est
$|\alpha\rangle = \cos\alpha|x\rangle + \sin\alpha|y\rangle$, $\quad |\alpha_\perp\rangle = \sin\alpha|x\rangle - \cos\alpha|y\rangle$

(d) On veut maintenant faire le contact avec le language des bits quantiques. Soit $|x\rangle \to |0\rangle$ et $|y\rangle \to |1\rangle$ et aussi $|1\rangle \to |0\rangle$ et $|2\rangle \to |1\rangle$.

- La matrice unitaire U est une matrice connue vue en cours: quelle est-elle ?
- Dessinez un circuit quantique correspondant à l'expérience ci-desus.



Problème 2: Codage superdense corrompu. (20 points)

Alice et Bob partagent une paire intriquée de qubits dont létat est:

$$|\Psi\rangle = (1+\delta^2)^{-1/2}\Big\{|B_{00}\rangle + \delta e^{i\gamma}|01\rangle\Big\}$$

ou en général $\delta \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma \in [0, 2\pi]$ et on rappelle que $|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Alice veut transmettre deux bits classiques d'information à Bob. Ils ne savent pas que l'état de la paire est corrompu (par le terme proportionel à δ) et donc appliquent le protocole standard:

- Si Alice veut envoyer le message (00) elle envoie sa particule quantique a Bob qui recoit donc tout l'état $|\Psi\rangle$ et fait une mesure de l'état global dans la base de Bell.
- Si Alice veut envoyer le message (01) elle applique $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur sa particule puis l'envoie a Bob qui ensuite fait une mesure de l'état global dans la base de Bell.
- Si Alice veut envoyer le message (10) elle applique $iY = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur sa particule puis l'envoie a Bob qui ensuite fait une mesure de l'état global dans la base de Bell.
- Si Alice veut envoyer le message (11) elle applique $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sur sa particule puis l'envoie a Bob qui ensuite fait une mesure de l'état global dans la base de Bell.

On rappelle que la base *orthonormée* de Bell est constituée des états $|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, $|B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, $|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, $|B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$.

(a) Supposons qu'Alice envoie le message (00). Calculez les probabilités de réception $P(00)$, $P(01)$, $P(10)$, $P(11)$ chez Bob.

(b) Supposons qu'Alice envoie le message (10). Calculez d'abord l'état global recu par Bob, puis les 4 probablités ci-dessus à nouveau.

Problème 3: Etat $|W\rangle$. (16 points)

On considère l'état suivant, appelé état W en information quantique,

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle\big)$$

Montrez que les trois qubits sont intriqués au sens où:

(a) On ne peut pas écrire l'état sous forme produit d'états à un qubit: $|W\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle$ avec $|\psi_i\rangle \in \mathbb{C}^2$.

(b) On ne peut pas l'écrire sous la forme produit d'un état à un qubit et d'un état à deux qubits: $|W\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_{23}\rangle$ avec $|\psi_1\rangle \in \mathbb{C}^2$ et $|\psi_{23}\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Problème 4: Echange d'intrication avec 3 qubits. (16 points)

On considère 6 particules quantiques 1, 2, 3, 4, 5, 6. Les paires 12, 34, 56 sont des paires de Bell. L'état des 6 particules est donc le suivant:

$$|\Psi\rangle = |B_{00}\rangle_{12} \otimes |B_{00}\rangle_{34} \otimes |B_{00}\rangle_{56}$$

On imagine que les particules 1, 3, 5 sont proches dans l'espace (mettons que ce sont trois photons piégés dans une piège optique sur la Terre) et que les particules 2, 4, 6 sont éloignées sur la Lune, Mars, et la Station Spatiale.

On effectue une mesure qui projette l'état des particules 1, 3, 5 sur l'état $|GHZ\rangle_{135} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle_{135} + |111\rangle_{135})$.

(a) L'état résultant après la mesure est propotionel à $P|\Psi\rangle$ avec P un certain projecteur. Quel est ce projecteur ?

(b) Donnez l'état résultant des particules 2, 4, 6 après la mesure ?

Problème 5: Dynamique du spin et sphère de Bloch. (24 points)

On considère un spin 1/2 dont la dynamique est décrite par un Hamiltonien de la forme

$$H = \frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_x$$

où $\hbar$ est la constante de Planck, δ et $\omega_1 \in \mathbb{R}$ et les deux matrices de Pauli $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle la formule:

$$\exp\Big(\frac{a}{2}\,\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}\Big) = (\cos\frac{a}{2})I + i(\sin\frac{a}{2})\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ un vecteur unité, $\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$, et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculez l'opérateur d'évolution

$$U(t,0) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$$

et exprimez le sous forme matricielle et aussi en notation de Dirac avec la convention $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(b) Considérez le cas $\omega_1 << \delta$ et l'état initial en $t = 0$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$.

- Calculez une bonne approximation de l'état final au temps t (pour cela considérez la limite $\omega_1 \to 0$ et δ fixe).
- Représentez la trajectoire sur la sphère de Bloch dans cette limite.
- Est-elle périodique ? Si oui quelle est la période ?

(c) Considérez le cas $\delta << \omega_1$ et l'état initial en $t = 0$ est $|\uparrow\rangle$.

- Calculez une bonne approximation de l'état final au temps t (pour cela considérez la limite $\delta \to 0$ et ω_1 fixe).
- Représentez la trajectoire sur la sphère de Bloch dans cette limite.
- Est-elle périodique ? Si oui quelle est la période ?