Examen final - Solution

Problème 1: Expérience avec un cristal biréfringent. *(24 points)*

(a) *(4 points)*Le deuxième cristal agit comme:

$$|x\rangle \otimes |1\rangle \to |x\rangle \otimes |1\rangle, \qquad |y\rangle \otimes |2\rangle \to |y\rangle \otimes |1\rangle$$

On peut aussid ire qu'il agit comme $U^\dagger$.

(b) *(8 points)*Etat après le premier cristal

$$U\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \otimes |1\rangle + |y\rangle \otimes |2\rangle)$$

Après le déphaseur:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \otimes |1\rangle + e^{i\varphi}|y\rangle \otimes |2\rangle)$$

Après le deuxieme cristal:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \otimes |1\rangle + e^{i\varphi}|y\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + e^{i\varphi}|y\rangle) \otimes |1\rangle$$

(c) *(8 points)*Le photo-détecteur clique si létat est projeté sur $|\alpha\rangle$. ceci a lieu avec probabilité:

$$\begin{aligned} P_{\text{clic}} &= |\langle\alpha|\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + e^{i\varphi}|y\rangle)|^2 \\ &= \frac{1}{2}|\cos\alpha + e^{i\varphi}\sin\alpha|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sin(2\alpha)\cos\varphi) \end{aligned}$$

(d) *(4 points)* La matrice U est égale au $CNOT$. Notez que $(CNOT)^\dagger = CNOT$ car cette matrice est réelle. Le dessin du circuit est constitué de (gauche à droite) sur deux lignes de qubit:

$$== CNOT == D(\varphi) \otimes I == CNOT == Mesure$$

Problème 2: Codage superdense corrompu. *(20 points)*

(a) *(10 points)* Si le message d'Alice est (00) elle envoie sa particule à Bob qui fait une mesure de létat global dans la base usuelle de Bell. La probabilité que Bob obtienne la paire (parfaite) de bell après la mesure est

$$P(00) = |\langle B_{00}|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{1+\delta^2}$$

car $\langle B_{00}|$ est orthogonal à $|01\rangle$. On a aussi:

$$P(01) = |\langle B_{01}|\Psi\rangle|^2 = \frac{\delta^2}{2(1+\delta^2)}$$

$$P(10) = |\langle B_{10}|\Psi\rangle|^2 = \frac{\delta^2}{2(1+\delta^2)}$$

$$P(11) = |\langle B_{11}|\Psi\rangle|^2 = 0$$

Remarque: les 4 probabilités se somment bien à un.

(b) *(10 points)* Si le message d'Alice est (10) elle applique iY sur sa particule et létat global recu par Bob sera donc:

$$|\Psi'\rangle = -(1+\delta^2)^{-1/2}(|B_{10}\rangle - \delta e^{i\gamma}|11\rangle\rangle)$$

Les 4 probabilités deviennent:

$$P(00) = |\langle B_{00}|\Psi'\rangle|^2 = \frac{\delta^2}{2(1+\delta^2)}$$

$$P(01) = |\langle B_{01}|\Psi'\rangle|^2 = 0$$

$$P(10) = |\langle B_{10}|\Psi'\rangle|^2 = \frac{1}{(1+\delta^2)}$$

$$P(11) = |\langle B_{11}|\Psi\rangle|^2 = \frac{\delta^2}{2(1+\delta^2)}$$

Problème 3: Etat $|W\rangle$. *(16 points)*

(a) *(8 points)* Raisonnement par l'absurde: On écrit $|\psi_i\rangle = \alpha_i|1\rangle + \beta_i|0\rangle$ et on développe le produit tensoriel ce qui donne une somme de 8 termes. En égalisant avec le développement de $|W\rangle$ on trouve des contradictions (immédiatement). Par exemple

$$\alpha_1\beta_2\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta_1\alpha_2\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta_1\beta_2\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

mais aussi

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

(car $|000\rangle$ n'est pas présent dans $|W\rangle$). La dernière égalité implique qu'un au moins des $\alpha_i = 0$ ce qui est impossible en vertu des trois premières.

(b) *(8 points)* De facon similaire si $|\psi_{23}\rangle = \gamma_{00}|00\rangle + \gamma_{01}|01\rangle + \gamma_{10}|10\rangle + \gamma_{11}|11\rangle$ et $|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ on obtient (par exemple)

$$\alpha_1\gamma_{00} = 0, \quad \alpha_1\gamma_{01} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ce qui implique $\gamma_{00} = 0$, mais d'un autre coté on doit aussi avoir

$$\beta_1\gamma_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ce qui est absurde.

Problème 4: Echange d'intrication avec 3 qubits. *(16 points)*

(a) *(6 points)* Le projecteur demandést necessairement:

$$P = |GHZ\rangle_{135}\langle GHZ|_{135} \otimes I_2 \otimes I_4 \otimes_6$$

car les particules avec un index pair ne sont pas "mesurées."
(b) *(10 points)* Après la mesure létat final global est prortionel à

$$P|\Psi\rangle$$

ce qui donne (après normalisation) pour létat des particules 246

$$|GHZ\rangle_{246}$$

En effet le projecteur impose que 135 soeint dans es états 000 ou 111. Mais comme $|Psi\rangle$ est un produit détats $|B_{00}\rangle$ les particules 246 sont dans le même état que 135.

Problème 5: Dynamique du spin et sphère de Bloch. *(24 points)*

(a) *(8 points)* L'opérateur dévolution est donné par

$$\begin{aligned} U(t,0) &= \exp\Big(-i\frac{t\delta}{2}\sigma_z + i\frac{t\omega_1}{2}\sigma_x\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{a}{2}(n_x\sigma_x + n_z\sigma_z\Big) \end{aligned}$$

avec $a = t(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}$ et $n_x = \frac{\omega_1}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}}$, $n_z = \frac{\delta}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}}$. Donc

$$\begin{aligned} U &= \cos\bigg(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\bigg)I + i\sin\bigg(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\bigg)\Big(\frac{\omega_1}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}}\sigma_x + \frac{\delta}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}}\sigma_z\Big) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\big(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\big) + i\delta\frac{\sin\left(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\right)}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}} & i\omega_1\frac{\sin\left(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\right)}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}} \\ i\omega_1\frac{\sin\left(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\right)}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}} & \cos\big(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\big) - i\delta\frac{\sin\left(\frac{t}{2}(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}\right)}{(\delta^2+\omega_1^2)^{1/2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) *(8 points = 3 + 3 + 2)* Dans la limite $\omega_1 << \delta$ on obtient

$$U(t,0) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t\delta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{t\delta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{t\delta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{t\delta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Avec létat initial $\frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ l'état final est

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{it\delta/2}|\uparrow\rangle + e^{-it\delta/2}|\downarrow\rangle = \frac{e^{-it\delta/2}}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + e^{-it\delta}|\downarrow\rangle$$

Trajectoire: Sur la sphère de Bloch il faut dessiner une trajectoire tournante le long de léquateur. Celle-ci est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\delta}$.

Dans le référentiel tournant létat n'est (approximativement) pas affecté par le champ tournant (situation de detuning extrême).

(c) *(8 points = 3 + 3 + 2)* Dans la limite $\delta << \omega_1$ on obtient

$$U(t,0) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Trajectoire: Sur la sphère de Bloch on dessine une trajectoire tournante autour de l'axe x (dans la plan (yz)). Celle-ci est périodique de période $T = \frac{4\pi}{\omega_1}$.

Dans le référentiel tournant ceci correspond à des spins flips dans une situation de tuning.