EPFL Automne 2022
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 12 - Corrigé

Pour cette series et la suivante il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Sauf mention explicite du contraire, on suppose que le corps de base K est de caracteristique $\neq 2$ de sorte que $1_K \neq -1_K$.

Formes multilineaires/symetriques/alternees

On note $\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K)$ l'espace des formes multilineaires en n variables sur V a valeurs dans K et on note $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ et $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ les sous-ensembles des formes symetriques et alternees.

Exercice 1. Montrer les fait suivants (certains etaient enonces en cours)

1. Montrer que $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(V^n, K)$ (l'espace des fonctions de V^n a valeurs dans K) quand on munis ce dernier de sa structure usuelle de K-EV.
2.
3. Montrer que pour $\lambda, \in K$
$$\Lambda(\lambda.v_1, \cdots, \lambda.v_n) = \lambda^n.\Lambda(v_1, \cdots, v_n).$$
4. Montrer que pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$
$$\Lambda(\lambda_1.v_1, \cdots, \lambda_n.v_n) = \lambda_1. \cdots .\lambda_n.\Lambda(v_1, \cdots, v_n).$$

Solution 1.

1. Montrons que $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(V^n, k)$. On rappelle que la loi d'addition et de multiplication de ce dernier sont définies comme suit : pour $f, g \in \mathcal{F}(V^n, k)$ et $\lambda \in K$, on définit l'application à valeur dans K $(\lambda f + g) : V^n \to K$ par $(\lambda f + g)(v) := \lambda f(v) + g(v)$.
On va appliquer le critère de sous-espace vectoriel. Assurément, la fonction définie par $\Lambda(v_1, ..., v_n) = 0$ est multilinéaire donc $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$ est non vide. Soit Λ et Ξ des formes multilinéaires, i.e des éléments de Mult, et montrons que pour $\lambda| \in K$, $(\lambda\Lambda + \Xi)$ est une forme multilinéaire. Assurément, $(\lambda\Lambda + \Xi)$ est une application de V^n à valeur dans K, il faut donc juste vérifier la multilinéarité. Soit $i \in \{1, ...n\}$ et $(v_j)_{j\in\{1,...n\}\setminus i}$ $n-1$ vecteurs de V^n, et considérons l'application
$$(\lambda\Lambda + \Xi)_{|i} : \begin{array}{ccc} V & \to & K \\ v & \mapsto & (\lambda\Lambda + \Xi)(v_1, ..., v_{i-1}, v, v_{i+1}, ...v_n) \end{array}$$

c'est-à-dire la restriction à la i-ème composante. Alors $\forall v, w \in V$ et $a \in K$:

$$(\lambda\Lambda+\Xi)_{|i}(av+w) = (\lambda\Lambda+\Xi)(v_1, ..., av+w, ...v_n) = \lambda\Lambda(v_1, ..., av+w, ...v_n)+\Xi(v_1, ..., av+w, ...v_n)$$

$$= \lambda a\Lambda(v_1, ..., v, ...v_n) + \lambda\Lambda(v_1, ..., w, ...v_n) + a\Xi(v_1, ..., v, ...v_n) + \Xi(v_1, ..., w, ...v_n)$$

où on a utilisé qu'à la fois Λ et Ξ étaient multilinéaires. Mais par propriété des opérations dans K, on peut réarranger les termes pour trouver $(\lambda\Lambda+\Xi)_{|i}(av+w) = a(\lambda\Lambda+\Xi)_{|i}(v)+(\lambda\Lambda+\Xi)_{|i}(w)$, ce qui montre que $(\lambda\Lambda + \Xi) \in \text{Mult}$.

3 & 4. On montre seulement le point 4 puisqu'il implique le point 3.
L'égalité découle directement de la multilinéarité de Λ car $\Lambda(v_1, ...\lambda_i v_i, ...v_n) = \lambda_i\Lambda(v_1, ..., v_i, ...v_n)$.

Exercice 2. Les notations comme ci-dessus

1. Montrer que $\text{Alt}^{(n)}(V; K)$ et $\text{Sym}^{(n)}(V; K)$ sont des SEVs de $\text{Mult}^{(n)}(V; K)$.
2. Montrer que sur $\text{car}K \neq 2$,

$$\text{Alt}^{(n)}(V; K) \cap \text{Sym}^{(n)}(V; K) = \{\underline{\mathbf{0}}_K\}$$

(ie. ils sont en somme directe).

3. Montrer que si $\text{car}K = 2$,

$$\text{Alt}^{(n)}(V; K) = \text{Sym}^{(n)}(V; K).$$

Solution 2.

1. Soit $\Lambda, \Xi \in \text{Mult}^{(n)}(V; K)$, $\lambda \in K$ et $(ij) \in \mathfrak{S}_n$ une transposition. Remarquons d'abord que si l'on note $\mathbf{v} := (v_1, ..., v_i, ..., v_j, ...v_n) \in V^n$ et $(ij).(\mathbf{v}) := (v_1, ..., v_j, ..., v_i, ...v_n)$ on a :

$$(ij)(\lambda\Lambda + \Xi)(\mathbf{v}) = (\lambda\Lambda + \Xi)((ij).\mathbf{v}) = \lambda.\Lambda((ij).\mathbf{v}) + \Xi((ij).\mathbf{v})$$

Ainsi on voit que si Λ et Ξ sont alternées (resp. symétriques), c'est-à-dire avec nos notations $\Lambda((ij)\mathbf{v}) = -\Lambda(\mathbf{v})$ (resp. $\Lambda((ij)\mathbf{v}) = \Lambda(\mathbf{v})$) et de même pour Ξ, on aura bien $(ij)(\lambda\Lambda+\Xi)(\mathbf{v}) = -(\lambda\Lambda + \Xi)(\mathbf{v})$ (resp. $(ij)(\lambda\Lambda + \Xi)(\mathbf{v}) = (\lambda\Lambda + \Xi)(\mathbf{v})$).

2. Soit $\Lambda \in \text{Alt}^{(n)}(V; K) \cap \text{Sym}^{(n)}(V; K)$ et (ij) une transposition. Alors on a puisque Λ est alternée que $(ij)\Lambda = -\Lambda$, mais également puisque Λ est symétrique que $(ij)\Lambda = \Lambda$, donc $\Lambda = -\Lambda$. Cela signifie que pour tout $\mathbf{v} \in V^n$, $\Lambda(v) = -\Lambda(v)$ dans K. Mais comme ce dernier est de caractéristique $\neq 2$ par hypothèse, on a que $\Lambda(\mathbf{v}) = 0$ ce qui montre que $\Lambda = 0$ et donc que l'intersection est triviale.

3. Comme $\text{car}K = 2$, on a que $1_K = -1_K$. Ainsi $\forall \mathbf{v} \in V^n$ et tout permutation (ij) :

$$\Lambda \in \text{Alt}^{(n)}(V; K) \Leftrightarrow (ij)\Lambda(\mathbf{v}) = -\Lambda(\mathbf{v}) \Leftrightarrow (ij)\Lambda(\mathbf{v}) = \Lambda(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \Lambda \in \text{Sym}^{(n)}(V; K)$$

Exercice 3. Soit $\varphi : V \mapsto V$ une application lineaire. Pour toute forme multilineaire Λ en n variables, on definit

$$\varphi^*(\Lambda) : (v_1, \cdots, v_d) \mapsto \Lambda(\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_d)).$$

1. Montrer que $\varphi^*(\Lambda)$ est multilineaire, alternee ou symetrique si Λ l'est.

2. On suppose que $n = d = \dim V$ alors on sait que l'espace des formes alternees $\mathrm{Alt}^{(d)}(V; K)$ est de dimension 1 et engendre par une forme alternee non-nulle Λ_0. Montrer qu'il existe un scalaire $\det \varphi \in K$ tel que
$$\varphi^*(\Lambda_0) = \det \varphi.\Lambda_0.$$

3. Montrer que pour toute forme alternee (en d variables) Λ on a
$$\varphi^*(\Lambda) = \det \varphi.\Lambda.$$

Le scalaire $\det \varphi$ est appelle le determinant de φ.

Solution 3. *NB* : on prend ici pour convention que $d = \mathrm{dim} V$ et que $\Lambda : V^n \to K$.

1. Montrons que $\varphi(\Lambda)$ est multilinéaire. Soit $i \in \{1, ...n\}$, et $(v_j)_{j\in\{1,...n\}\setminus i} \subset V$ un choix de $n-1$ vecteurs. En suivant les mêmes notations que dans la solution de l'exercice 1.1, on a pour $v, w \in V$ et $a \in K$:
$$\varphi^*(\Lambda)_{|i}(av + w) = \Lambda(\varphi(v_1), ..., \varphi(av + w), ...\varphi(v_n)) = \Lambda(\varphi(v_1), ..., a\varphi(v) + \varphi(w), ...\varphi(v_n))$$
$$= a\Lambda(\varphi(v_1), ..., \varphi(v), ...\varphi(v_n)) + \Lambda(\varphi(v_1), ..., \varphi(w), ...\varphi(v_n)) = a\varphi^*(\Lambda)_{|i}(v) + \varphi^*(\Lambda)_{|i}(w)$$
où on a utilisé la linéarité de φ puis la multilinéarité de Λ. Donc $\varphi(\Lambda)$ est linéaire en la i-ème composante et par arbitrarité de i on conclut.
On suppose maintenant Λ alternée. Alors pour (ij) une transposition et $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_i, ..., v_j, ...v_n) \in V^n$, on a :
$$(ij)\varphi^*(\Lambda)(\mathbf{v}) = (ij)\Lambda(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_i), ..., \varphi(v_j), ...\varphi(v_n) = \Lambda(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_j), ..., \varphi(v_i), ...\varphi(v_n))$$
$$= -\Lambda(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_i), ..., \varphi(v_j), ...\varphi(v_n))_= - \varphi^*(\Lambda)(\mathbf{v})$$
Donc $\varphi(\Lambda)$ est alternée. Si on suppose Λ symétrique, on conclut par un calcul analogue que $\varphi(\Lambda)$ est symétrique.

2. Notons que Λ_0 est une base de $\mathrm{Alt}^{(d)}(V; K)$. Ainsi, puisque puisque par le point précédent $\varphi^*(\Lambda_0)$ est alternée, on a l'existence (et l'unicité) d'un certain scalaire que l'on va appeler $\det\varphi$ tel que $\varphi^*(\Lambda_0) = \det(\varphi)\Lambda_0$.

3. Soit Λ alternée, alors par le même raisonnement qu'en 2. il existe un scalaire tel que $\Lambda = \lambda\Lambda_0$. on a
$$\varphi^*(\Lambda) = \varphi^*(\lambda\Lambda_0) = (\lambda\Lambda_0) \circ \varphi^{\otimes d} = \lambda(\Lambda_0 \circ \varphi^{\otimes d}) = \lambda\varphi^*(\Lambda_0) = \lambda \det(\varphi)\Lambda_0 = \det(\varphi)\lambda\Lambda_0 = \det(\varphi)\Lambda$$
où on a utilisé la commutativité du corps K pour établir la dernière égalité.

Action par permutations

Exercice 4 (Rappels sur le groupe symetrique)**.** Soit $n \geq 1$ et $\mathfrak{S}_n = (\{1, \cdots, n\})$ le groupe des permutations de n elements. On rappelle qu'il existe un morphisme de groupes (la signature) non-trivial (qui n'est pas constant egal a 1)
$$\mathrm{sign} : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

On va montrer que c'est le seul.

1. Soit G un groupe et $\varphi : G \mapsto C$ un morphisme vers un groupe commutatif C. Montrer que pour tout $g, h \in G$ on a
$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h).$$
2. Soit $s : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}$ un morphisme non-trivial ; montrer qu'il existe une transposition τ telle que $s(\tau) = -1$.
3. Montrer que pour toute transposition τ' on a $s(\tau') = -1$ et que $s = \text{sign}$.
4. Montrer que
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) = 0.$$
Pour cela on pourra considerer une transposition τ et faire le changement de variable $\sigma \leftrightarrow \sigma\tau$ dans la somme ci-dessus pour montrer qu'elle s'annule.

Solution 4.

1. Puisque φ est un morphisme, on a $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}$, mais comme C est supposé commutatif, on peut permuter les termes. Ainsi $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1}\varphi(h) = \varphi(h)$.
2. Rappelons que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on peut écrire σ comme un produit fini de transpositions τ_i, i.e $\sigma = \prod_{i=1}^m \tau_i$. Supposons par l'absurde que pour toute transposition τ on ait $s(\tau) = 1$. Alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et puisque s est un morphisme, on a que :
$$s(\sigma) = s(\prod_{i=1}^m \tau_i) = \prod_{i=1}^m s(\tau_i) = 1$$
ce qui implique que s est le morphisme trivial, contredisant notre hypothèse. Ainsi il doit exister une transposition τ telle que $s(\tau) = -1$.
3. On rappelle ici le résultat du cours de Structures Algébriques suivant : toutes les transpositions sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$. En effet, pour un couple de transpositions $(ij),\ (kl)$ avec i, j, k, l deux à deux distincts on a pour $\sigma = (ik)(jl)$ que $\sigma(ij)\sigma^{-1} = (kl)$. Si i, j, k, l ne sont pas deux à deux distincts et comme $i \neq j$, $k \neq l$, on a soit $(ij) = (kl)$ auquel cas on a fini, soit spdg $j = l$. On a dans ce cas, pour $\sigma = (ik)$, à nouveau que $\sigma(ij)\sigma^{-1} = (jk)$ d'où le résultat.
NB : on aurait également pu utiliser la formule de conjugaison des cycles vue en Structures Algébriques.

   On en déduit que pour τ' une transposition, il existe une permutation σ satisfaisant $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau'$. Par le point 1, on obtient que $s(\tau') = s(\tau)$ comme voulu.
Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ arbitraire, et en utilisant la décomposition $\sigma = \prod_{i=1}^m \tau_i$, on a alors que
$$s(\sigma) = \prod_{i=1}^m s(\tau_i) = \prod_{i=1}^m (-1) = (-1)^m = \text{sign}(\sigma)$$
comme voulu.
4. Suivant l'indication, on prend une transposition τ dans $\mathfrak{S}_n$, et on effectue le changement de variable $\sigma' = \sigma\tau$:
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma'\tau) = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma')\text{sign}(\tau) = -\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma')$$

où on a utilisé que $\tau = \tau^{-1}$, le fait que sign est un morphisme et que $\mathrm{sign}(\tau) = -1$. Mais puisque la somme (dans $\mathbb{Z}$) est égale à moins elle-même, elle doit valoir 0 comme voulu.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ et $\sigma : \{1, \cdots, n\} \mapsto \{1, \cdots, n\}$ une permutation de $\{1, \cdots, n\}$.

1. Montrer que
$$\sigma.\bullet : \Lambda \mapsto \sigma.\Lambda$$
definie par
$$\sigma.\Lambda : (v_1, \cdots, v_n) = \Lambda(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)})$$
est une application lineaire de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$ sur $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$.
2. Montrer que $\sigma.\bullet$ envoie le sous-espace $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ sur $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ et $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ sur $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ (quelque soit la signature de σ).
3. Soient $l_1, \cdots, l_n : V \mapsto K$ des forme lineaires (pas forcement distinctes) montrer que
$$\sigma.(l_1 \otimes \cdots \otimes l_n) = l_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes l_{\sigma^{-1}(n)}$$
ou σ^{-1} est la permutation reciproque.

Solution 5.

1. Soit $\Lambda,\ \Xi \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$, et $\lambda \in K$, et montrons l'égalité $\sigma. \bullet (\lambda.\Lambda + \Xi) = \lambda.\sigma. \bullet (\Lambda) + \sigma. \bullet (\Xi)$. Pour $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n) \in V^n$, et si l'on note $\sigma.\mathbf{v} := (v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)})$,on a :
$$\sigma. \bullet (\lambda.\Lambda + \Xi)(\mathbf{v}) = (\lambda.\Lambda + \Xi)(\sigma.\mathbf{v}) = \lambda.\Lambda(\sigma.\mathbf{v}) + \Xi(\sigma.\mathbf{v}) = \lambda.\sigma. \bullet (\Lambda) + \sigma. \bullet (\Xi)(\mathbf{v})$$
ce qui montre que les deux applications sont égales.
2. Par le théorème 11.2 du cours, la construction de l'exercice définit en fait une action de groupe $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$. En particulier, pour σ, σ' des permutations, on a $(\sigma \circ \sigma').\bullet = (\sigma.\bullet) \circ (\sigma'.\bullet)$. De plus, par le théorème 11.3, si Λ est une forme alternée, on a que $\sigma.\Lambda = \mathrm{sign}(\sigma)\Lambda$.
Alors pour τ une transposition et Λ une forme alternée, on a :
$$\tau(\sigma.\Lambda) = (\tau \circ \sigma).\Lambda = \mathrm{sign}(\tau \circ \sigma)\Lambda = \mathrm{sign}(\tau)\mathrm{sign}(\sigma)\Lambda = -\mathrm{sign}(\sigma)\Lambda = -\sigma.\Lambda$$
Ce qui montre que $\sigma.\Lambda$ est alternée. Si $\Lambda \in \mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$, on a par le théorème 11.3 que $\sigma.\Lambda = \Lambda$ d'où le résultat.
3. On rappelle que par définition $(\bigotimes_{i=1}^n l_i)(v_1, ..., v_n) := l_1 \otimes \cdots \otimes l_n(v_1, ..., v_n) = \prod_{i=1}^n l_i(v_i)$, où l'on a introduit la notation condensée $\bigotimes$ pour le produit tensoriel. Ainsi pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:
$$(\sigma. \bigotimes_{i=1}^n l_i)(v_1, ...v_n) = (\bigotimes_{i=1}^n l_i)(v_{\sigma(1)}, ...v_{\sigma(n)}) = \prod_{i=1}^n l_i(v_{\sigma(i)})$$
En faisant le changement d'indice $j = \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(j) = i$ (ce qui est possible car σ est un bijection de $\{1, ...n\}$)), on obtient :
$$\prod_{i=1}^n l_i(v_{\sigma(i)}) = \prod_{j=1}^n l_{\sigma^{-1}(j)}(v_j) = (\bigotimes_{j=1}^n l_{\sigma^{-1}(j)})(v_1, ..., v_n)$$
Comme l'évaluation en tout n-tuplet $(v_1, ..., v_n)$ est la même, on en déduit que $\sigma.(l_1 \otimes \cdots \otimes l_n) = l_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes l_{\sigma^{-1}(n)}$ comme voulu.

Symetrisation

Dans le cours on a vu l' endomorphisme de symetrisation de l'espace $\text{Mult}^{(n)}(V, K)$:

$$\bullet_{\text{sign}} : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma)\sigma.\Lambda$$

qui permet de produire une forme alternee : il correspond a l'action du groupe $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \text{Mult}^{(n)}(V, K)$ par permutation des variables et au morphisme

$$\text{sign} : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

On definit egalement

$$\bullet_1 : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma.\Lambda$$

correspondant au morphisme trivial

$$1 : \mathfrak{S}_n \mapsto 1.$$

Exercice 6. On suppose $n = 2$ et soit V un EV de dimension $d \geq 2$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$.

1. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\text{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de forms lineaires ?
2. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_{\text{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de forms lineaires ?

Solution 6.

1. On a par définition de $\bullet_{\text{sign}}$, et si l'on note Id et τ les deux éléments de $\mathfrak{S}_2$:

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\text{sign}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \text{sign}(\sigma)\sigma.(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) = \text{sign}(\text{Id})\text{Id}.(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) + \text{sign}(\tau)\tau.(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)$$

   Maintenant on sait que $\text{sign}(\text{Id}) = 1$, $\text{sign}(\tau) = -1$ et $\text{Id}.(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) = (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)$. De plus, on a par l'exercice 5.3 que $\tau.(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) = (\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1^*)$ car $\tau = \tau^{-1}$. Donc :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\text{sign}} = (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) - (\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1^*)$$

   Par un calcul similaire, on a :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_1 = \text{Id}.(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) + \tau.(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) = (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) + (\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1^*)$$

2. En reprenant les calculs faits au point 1 mais en remplaçant $\mathbf{e}_2^*$ par $\mathbf{e}_1^*$ on obtient :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_{\text{sign}} = (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*) - (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*) = 0.$$

   De même :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_1 = (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*) + (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*) = 2(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*).$$

Exercice 7. On suppose $n = 3$ et soit V un EV de dimension $d \geq 3$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$.

1. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\text{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de forms lineaires ?
2. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\text{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de forms lineaires ?

Solution 7.

1. On rappelle que $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{Id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. De plus, les 2-cycles sont leur propre inverse et ont une signature -1, et les 3-cycles sont mutuellement inverses et ont une signature 1. Alors en utilisant à nouveau l'exercice 5.3 on trouve :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma.(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*) =$$

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*) - (\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*) - (\mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1^*) - (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_2^*) + (\mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) + (\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^*)$$

Par un raisonnement similaire :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1 = (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*) + (\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*) + (\mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1^*) + (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_2^*) + (\mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) + (\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^*)$$

2. En appliquant le point précédent mais en remplaçant $\mathbf{e}_2^*$ par $\mathbf{e}_1^*$ on obtient :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}} = (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*) - (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*) - (\mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*) - (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^*) + (\mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*) + (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^*)$$

En fait les termes s'annulent deux à deux et on obtient $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}} = 0$.
Par ailleurs :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1 = 2(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*) + 2(\mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*) + 2(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_1^*).$$

Exercice 8. Soit V un EV de dimension $d = 2$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Soient v_1, v_2 deux vecteurs de coordonnees

$$v_i = \sum_{j=1}^{2} x_{ij}\mathbf{e}_j.$$

1. Exprimer $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\mathrm{sign}}(v_1, v_2)$ en fonction des $(x_{ij})_{i,j \leq 2}$

Solution 8.

1. On rappelle que par construction de la base duale, on a $\mathbf{e}_j^*(\mathbf{e}_i) = \delta_{i=j}$. Ainsi par linéarité, on a que $\mathbf{e}_j^*(v_i) = x_{ij}$.Par les calculs faits à l'exercice 7, on trouve :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\mathrm{sign}}(v_1, v_2) = ((\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*) - (\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1^*))(v_1, v_2) = \mathbf{e}_1^*(v_1)\mathbf{e}_2^*(v_2) - \mathbf{e}_2^*(v_1)\mathbf{e}_1^*(v_2) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.$$

Exercice 9. Soit V un EV de dimension $d = 3$ et de base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Soient v_1, v_2, v_3 deux vecteurs de coordonnees

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij}\mathbf{e}_j.$$

1. Exprimer $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}}(v_1, v_2, v_3)$ en fonction des $(x_{ij})_{i,j \leq 3}$.

Solution 9.

1. Par le résultat de l'exercice 7.1, on trouve :

$$(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\mathrm{sign}}(v_1, v_2, v_3) = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{23}x_{32} + x_{13}x_{21}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31}$$

Exercice 10. On consider le cas n general.

1. Montrer que $\bullet_1$ envoie $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$ sur $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$ (on a vu dans le cours que $\bullet_{\mathrm{sign}}$ envoie $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$ sur $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$).
2. Montrer que $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_{\mathrm{sign}}$ et que $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_1$ (utiliser l'exercice 4).
3. Calculer Λ_{sign} si Λ est alternee.
4. Calculer Λ_1 si Λ est symetrique.

Solution 10.

1. On veut montrer que pour $\Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$, $\bullet_1(\Lambda) = \Lambda_1 \in \mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$. On utilise pour cela la propriété du processus de symétrisation vue dans théorème 11.6. En reprenant les notations de la preuve du corollaire 11.1, on a pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ que $\iota(\sigma)(\Lambda_1) = 1(\sigma).(\Lambda_1)$, où on a noté $1\colon \mathfrak{S}_n \to 1$ le morphisme trivial utilisé pour construire $\bullet_1$. Mais en fait cette équation dit exactement que $\sigma.\Lambda_1 = \Lambda_1$ ce qui montre que Λ_1 est symétrique (par le théorème 11.3).
2. Soit $\Lambda \in \mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$, on veut montrer que $\Lambda_{\mathrm{sign}} = 0$ la forme multilinéaire nulle. En utilisant le fait que $\sigma.\Lambda = \Lambda$, on trouve :

$$\Lambda_{\mathrm{sign}} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma.\Lambda = \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\right)\Lambda$$

   Mais par l'exercice 4.4 on sait que cette somme est nulle, d'où $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K) \subseteq \ker \bullet_{\mathrm{sign}}$.
   De la même manière, pour $\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ cette fois-ci, c'est-à-dire $\sigma.\Lambda = \mathrm{sign}(\sigma)\Lambda$, on a :

$$\Lambda_1 = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma.\Lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\Lambda = \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\right)\Lambda$$

   donc on conclut de la même manière que $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) \subseteq \ker \bullet_1$.
3. . Pour $\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$, on a :

$$\Lambda_{\mathrm{sign}} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma.\Lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)^2\Lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \Lambda = |\mathfrak{S}_n|\Lambda = n!\Lambda$$

   car $\mathrm{sign}(\sigma)^2$ est toujours égal à 1.
4. . De même, pour $\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$, on a :

$$\Lambda_1 = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma.\Lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \Lambda = n!\Lambda$$

Matrices de permutation

Exercice 11. Soit V un K-ev de dimension d et $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V fixee. Soit $\sigma : \{1, \cdots, d\} \mapsto \{1, \cdots, d\}$ une permutation. On lui associe l'unique application lineaire φ_σ qui envoie chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ sur le vecteur $\mathbf{e}_{\sigma(i)}$ pour $i \le d$:

$$\text{si } v = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d \text{ alors } \varphi_\sigma(v) = x_1\mathbf{e}_{\sigma(1)} + \cdots + x_d\mathbf{e}_{\sigma(d)}.$$

1. Quand $n = 2, 3$ donner les matrices M_σ des φ_σ calculees dans la base $\mathscr{B}$ (ces matrices sont appellees matrices de permutations).

2. Par echalonement-reduction montrer que $M_{(123)}$ est inversible et que son inverse est une matrice de permutation.
3. En general montrer (sans calculs) que φ_σ est inversible et calculer son inverse.
4. Montrer que $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ defini un morphisme de groupes injectif de $\mathfrak{S}_d$ vers $\mathrm{GL}(V)$. L'image s'appelle le groupe des matrices de permutations (associees a la base $\mathscr{B}$).
5. Que vaut $\varphi_\sigma^*(\mathbf{e}_1^*\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_d^*)$ (montrer que c'est un produit tensoriel de formes lineaires explicites) ?
6. Montrer que $\det(\varphi_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$ (voir l'exercice 3 pour le definition de det et des proprietes utiles).

Remarque. On rappelle que tout groupe fini G peut est realise comme (ie. par injection dans) un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_{|G|}$. Cet exercice montre donc que tout groupe fini peut etre realise comme un sous-groupe du groupe des d'applications lineaires inversibles $\mathrm{GL}(V)$ (d'un espace vectoriel de dimension $d = |G|$). On appelle cela la *linearisation* : cela permet de ramener certaines questions de la theorie des groupes finis a des questions d'algebre lineaire.

Solution 11.

1. On rappelle que la i-ème colonne de M est donnée par $\varphi(e_i)$. Pour $d = 2$, on a donc que $M_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}_2$, et $M_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Pour $d = 3$, on trouve :
$$M_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}_3,\ M_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_{(132)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. En inversant la première et la deuxième ligne, puis la deuxième et la troisième ligne, on retrouve la matrice identité. En fait ces opérations correspondent à l'égalité $(123) = (12)(23)$.
3. On remarque que pour $\mathbf{e}_i$ un élément de la base $\mathscr{B}$, on a $\varphi_\sigma \circ \varphi_{\sigma^{-1}}(\mathbf{e}_i) = \varphi_\sigma(\mathbf{e}_{\sigma^{-1}(i)}) = \mathbf{e}_{\sigma\circ\sigma^{-1}(i)} = \mathbf{e}_i$, ce qui montre que $\varphi_\sigma^{-1} = \varphi_{\sigma^{-1}}$ puisque l'application est linéaire.
4. Montrons que l'application $\varphi_\bullet : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_d & \to & \mathrm{GL}(V) \\ \sigma & \mapsto & \varphi_\sigma \end{array}$ est un morphisme de groupe injectif. L'application est bien définie, car par le point précédent, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, φ_σ est bien une application linéaire inversible. Pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_d$, on veut montrer que que $\varphi_{\sigma\circ\tau} = \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau$. En testant l'égalité sur un élément de la base, on a :
$$\varphi_{\sigma\circ\tau}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\sigma\circ\tau(i)} = \varphi_\sigma(\mathbf{e}_{\tau(i)}) = \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau(\mathbf{e}_i)$$
   ce qui montre (à nouveau par linéarité) que les deux applications sont les mêmes, et donc que $\varphi_\bullet$ est bien un morphisme de groupe.
   Pour l'injectivité, remarquons que si $\varphi_\sigma = \varphi_\tau$, alors en particulier on a pour $i \in \{1, ..., d\}$ que $\varphi_\sigma(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\sigma(i)} = \mathbf{e}_{\tau(i)} = \varphi_\tau(\mathbf{e}_i)$, ce qui implique $\sigma(i) = \tau(i)$. Mais puisque i était arbitraire, on a en fait que $\sigma = \tau$, ce qui montre que $\varphi_\bullet$ est injectif.

5. Considérons une collection de d vecteurs v_i exprimés dans la base $\mathscr{B}$. On pose $v_i = \sum_{j=1}^d x_{ij}\mathbf{e}_j$. Remarquons que par linéarité de φ_σ, on a que :

$$\varphi_\sigma(v_i) = \varphi_\sigma(\sum_{j=1}^d x_{ij}\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^d x_{ij}\varphi_\sigma(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^d x_{ij}\mathbf{e}_{\sigma(j)}.$$

Ainsi, pour $i = 1, ...d$, on a par linéarité de $\mathbf{e}_i^*$ cette fois-ci que :

$$\mathbf{e}_i^*(\varphi_\sigma(v_i)) = \mathbf{e}_i^*(\sum_{j=1}^d x_{ij}\mathbf{e}_{\sigma(j)}) = \sum_{j=1}^d x_{ij}\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_{\sigma(j)}) = \sum_{j=1}^d x_{ij}\delta_{i=\sigma(j)}.$$

Mais puisque σ est une bijection de $\{1, ..., d\}$, il existe un unique $j \in \{1, ..., d\}$ tel que $\sigma(i) = j$. Le seul terme non-nul dans la somme ci-dessus est donc $x_{i\sigma^{-1}(i)}$. Alors si on note $\mathbf{v} := (v_1, ..., v_d)$, on trouve que :

$$\varphi_\sigma^*(\bigotimes_{i=1}^d \mathbf{e}_i^*)(\mathbf{v}) = (\bigotimes_{i=1}^d \mathbf{e}_i^*)(\varphi_\sigma(v_1), ..., \varphi_\sigma(v_d)) = \prod_{i=1}^d \mathbf{e}_i^*(\varphi_\sigma(v_i)) = \prod_{i=1}^d x_{i\sigma^{-1}(i)} = \bigotimes_{i=1}^d \mathbf{e}_{\sigma^{-1}(i)}^*(\mathbf{v}).$$

Comme $\mathbf{v}$ était arbitraire, on trouve que $\varphi_\sigma^*(\mathbf{e}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_d^*) = (\mathbf{e}_{\sigma^{-1}(1)}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\sigma^{-1}(d)}^*)$.

6. Puisque $\Lambda_0 := (\mathbf{e}_1^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_d)_{\text{sign}}$ est alternée, par l'exercice 3 si l'on trouve $\lambda \in K$ tel que $\varphi_\sigma^*(\Lambda_0) = \lambda.\Lambda_0$, alors on aura que $\lambda = \det(\varphi_\sigma)$. On rappelle que par le point précédent, on a que $\varphi_\sigma^*(\mathbf{e}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_d^*) = (\mathbf{e}_{\sigma^{-1}(1)}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\sigma^{-1}(d)}^*) = \sigma.(\mathbf{e}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_d^*)$ où la dernière égalité a été montrée à l'exercice 5.3. De plus, pour un scalaire a et des formes multilinéaires Λ, Ξ, on a que $\varphi_\sigma^*(a\Lambda + \Xi) = a\varphi_\sigma^*(\Lambda) + \varphi_\sigma^*(\Xi)$ (cette égalité découle de la définition des opérations dans $\mathcal{F}(V^n, K)$). Alors, en utilisant la définition de $\bullet_{\text{sign}}$, il vient :

$$\varphi_\sigma^*(\Lambda_0) = \varphi_\sigma^*\left(\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma')\sigma'.(\mathbf{e}_1^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_d^*)\right) = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma')\varphi_\sigma^*(\sigma'.(\mathbf{e}_1^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_d^*)).$$

Mais $\varphi_\sigma^*(\sigma'.(\mathbf{e}_1^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_d^*)) = \varphi_\sigma^*(\mathbf{e}_{\sigma'^{-1}(1)}^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{\sigma'^{-1}(d)}^*) = (\mathbf{e}_{\sigma^{-1}\circ\sigma'^{-1}(1)}^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{\sigma^{-1}\circ\sigma'^{-1}(d)}^*) = (\mathbf{e}_{(\sigma'\circ\sigma)^{-1}(1)}^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{(\sigma'\circ\sigma)^{-1}(d)}^*)$. Mais alors par le changement d'indice $\tau = \sigma' \circ \sigma$:

$$\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma')(\mathbf{e}_{(\sigma'\circ\sigma)^{-1}(1)}^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{(\sigma'\circ\sigma)^{-1}(d)}^*) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\tau \circ \sigma^{-1})(\mathbf{e}_{(\tau)^{-1}(1)}^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{(\tau)^{-1}(d)}^*)$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\tau)\text{sign}(\sigma^{-1})\tau.(\mathbf{e}_1^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_d^*) = \text{sign}(\sigma^{-1})\left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\tau)\tau.(\mathbf{e}_1^* \otimes ... \otimes \mathbf{e}_d^*)\right) = \text{sign}(\sigma)\Lambda_0$$

puisque $\text{sign}(\sigma)^{-1} = \text{sign}(\sigma)$. Donc $\varphi_\sigma^*(\Lambda_0) = \text{sign}(\sigma)\Lambda_0$, ce qui montre que $\det(\varphi_\sigma) = \text{sign}(\sigma)$.