EPFL - Printemps 2022	M. Troyanov
Géométrie Riemannienne I	**Exercices**
Série 4	15 Mars 2022

4.1. Prouver que pour toute connexion ∇ sur une variété M, l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & \Gamma(M)\times\Gamma(M) & \longrightarrow & \Gamma(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array}$$

est un tenseur sur M, c'est-à-dire qu'elle bilinéaire sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(M)$.

4.2. Soit (M,g) une variété riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Montrer la formule de Koszul :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X\cdot g(Y,Z) + Y\cdot g(Z,X) - Z\cdot g(X,Y) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z,],X)$$

En déduire une autre preuve de l'existence et l'unicité de ∇.

4.3. Démontrer le lemme 3.2.4 du polycopié.

4.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et soit

$$\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

un plongement lisse. On munit la sous-variété $M = \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ de la métrique riemannienne induite par la métrique usuelle de $\mathbb{R}^n$. On note $u^1,\dots,u^k$ les coordonnées sur M associées à la carte ψ^{-1}. On peut alors représenter la base associée de l'espace tangent en un point $p = \psi(u)$ de M par les vecteurs "concret"

$$\xi_i = \psi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial u^i} \quad (i = 1,\dots,k)$$

Montrer que les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée sont reliés aux composantes tangentielles des dérivées seconde de ψ de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u_i \partial u_j}\right)^\top = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \xi_k,$$

où $\xi^\top$ représente la composante tangentielle sur T_pM d'un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$.

4.5. [Transport parallèle] Soit (M,g) une variété riemannienne et $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe lisse quelconque.

(a) Montrer que si ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g et $X,Y \in \Gamma_\gamma$ sont des champs parallèles le long de γ, alors $g(X,Y)$ est constant le long de γ.

(b) En déduire que P_t est une isométrie de $T_{\gamma(0)}M$ sur $T_{\gamma(t)}M$ puis qu'il existe des champs de vecteurs qui forment une base orthonormée en tout point et qui sont parallèle le long de γ.

(c) Soit X un champs parallèle le long de γ. Montrer que ses coordonnées dans un repère du type précédent sont constantes.

(d) Montrer que γ est une géodésique si et seulement si $\|\dot\gamma\|$ est constante et si $\|X\|$ et $\angle(X,\dot\gamma)$ sont constants le long de γ pour tout champ parallèle X.