**3.1.** (a) La métrique s'écrit matriciellement

$$g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'élément de volume

$$dv_g(x,y) = \frac{dxdy}{y^2}.$$

C'est avec cette mesure que l'on calcule une aire hyperbolique. Soit donc

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 \ , \ 1 \leqslant x \leqslant a \ \text{ et } \ b \leqslant y\right\}.$$

Alors,

$$\int_T dv_g(x,y) = (a-1)\int_b^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{a-1}{b}.$$

On note que cette aire est finie pour la mesure de volume hyperbolique et infinie pour la mesure euclidienne. Cela vient du fait que la mesure hyperbolique contracte les longueurs des points loin de l'axe réel. Ainsi deux points de même ordonnée sur les droites verticales du triangle sont à distance euclidienne constante tandis qu'ils se rapprochant exponentiellement vite pour la distance hyperbolique.

(b) Montrons déjà qu'une telle application laisse le demi-plan supérieur invariant :

$$\mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}\left(\frac{(a(x+iy)+b)(c(x-iy)+d}{|cz+d|^2}\right) = \frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}$$

Puisque $ad-bc>0$, on conclut que $\mathrm{Im}(f(z))>0$. Montrons maintenant que $f$ est une isométrie. Puisque $f$ est clairement holomorphe, il est commode de raisonner en termes complexes. Cela facilite le calcul de la différentielle de $f$, on a $df_z(u) = f'(z)u = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}u$. On rappelle aussi que le produit scalaire *euclidien* dans $\mathbb{C}$ peut s'écrire $\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}(u\bar{v})$, donc la métrique hyperbolique dans $\mathbb{H}^2$ s'écrit en notation complexe :

$$h_z(u,v) = \frac{\mathrm{Re}(u\bar{v})}{(\mathrm{Im}(z))^2},$$

où $u,v \in T_z\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{C}$, qu'on identifie à des nombres complexes.
On a ainsi :

$$\begin{aligned}
(f^*h)_z(u,v) &= h_{f(z)}(df_z(u), df_z(v)) \\
&= \frac{1}{(\mathrm{Im}(f(z)))^2}\mathrm{Re}(f'(z)u, f'(z)v) \\
&= \frac{|cz+d|^2}{(\mathrm{Im}(z))^2(ad-bc)^2}\mathrm{Re}\left(\frac{(ad-bc)u}{(cz+d)^2}\overline{\left(\frac{(ad-bc)v}{(cz+d)^2}\right)}\right) \\
&= \frac{\mathrm{Re}(u\bar{v})}{(\mathrm{Im}(z))^2} \\
&= h_z(u,v).
\end{aligned}$$

(c) On fixe $\xi$ et on résout l'équation en $z$,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \xi.$$

On trouve

$$f^{-1}(\xi) = \frac{d\xi - b}{-\xi c + a}$$

et $\xi \neq \frac{a}{c}$ car $\xi$ ne peut être réel ($\mathrm{Im}(\xi) > 0$).

On remarque que si $ad - bc = 1$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ et si $f$ est l'isométrie de $\mathbb{H}^2$ qui correspond à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $f^{-1}$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$.

(d) et (e)

(i) Montrons tout d'abord que $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{H}^2$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\varphi(z)) &= \mathrm{Im}\left(\frac{-i(x+iy+1)(x-iy-1)}{|z-1|^2}\right) \\ &= \cdots \\ &= \frac{1-x^2-y^2}{|z-1|^2} > 0 \end{aligned}$$

car $x^2 + y^2 < 1$.

(ii) $\varphi$ est holomorphe.

(iii) L'équation $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ conduit facilement à $z_1 = z_2$ donc $\varphi$ est injective.

(iv) On montre que $\varphi$ est surjective et on calcule son inverse en résolvant l'équation en $z$, $\varphi(z) = \xi$. On trouve

$$z = \varphi^{-1}(\xi) = \frac{1+i\xi}{i\xi - 1}$$

et on constate au passage que l'inverse est holomorphe.

(f) On calcule $\varphi^* h$ On rappelle qu'on a déjà calculé $\mathrm{Im}(\varphi(z))$ et qu'on peut différentier $\varphi$ comme une fonction holomorphe. On trouve après quelques calculs :

$$(\varphi^* h)_z(u,v) = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\mathrm{Re}(u\bar{v}).$$

On en déduit que

$$g_z = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

**3.2**. (a) L'énergie d'une courbe $\gamma(t) = x(t), y(t))$ dans le demi-plan de Poincaré s'écrit

$$\int \|\dot\gamma(t)\|^2_{\mathrm{hyp}} dt = \int f(x,y,\dot x,\dot y) dt,$$

avec $f(x,y,\dot x,\dot y) = \dfrac{\dot x^2 + \dot y^2}{y^2}$. On pose maintenant $u = \dot x$ et $v = \dot y$ en sorte que le Lagrangien s'écrit

$$f(x,y,u,v) = \frac{u^2+v^2}{y^2}.$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u}{y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 2\frac{v}{y^2}$$

puis, en dérivant par rapport au temps,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2}{y^2}\left(\ddot{x} - 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2}{y^2}\left(\ddot{y} - 2\frac{\dot{y}^2}{y}\right).$$

Les équations d'Euler-Lagrange se traduisent donc en

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}, \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}.$$

On verra plus tard comment décrire géométriquement ces courbes.

(b) Il suffit d'appliquer les résultat de (d) (numéro (i)). et de (e) de l'exercice 3.3

**3.3**. On rappelle les équations d'Euler-Lagrange pour une courbe critique : pour tout $i = 1, \cdots, n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i}(\gamma, \dot{\gamma}).$$

(a) Soit $x$ une courbe critique pour $f$ et soit $\alpha$ la fonction de $t$ donnée par

$$\alpha(t) = A(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(x(t)\dot{x}(t)) - f(x(t)\dot{x}(t)).$$

Il s'agit de montrer que que $\frac{d\alpha}{dt} = 0$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt}(t) &= \sum_i \ddot{x}^i(t)\frac{\partial f}{\partial v^i}(x(t), \dot{x}(t)) + \dot{x}^i(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}f(x(t), \dot{x}(t)) \\
&= \sum_i \ddot{x}^i(t)\frac{\partial f}{\partial v^i}(x(t), \dot{x}(t)) + \dot{x}^i(t)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}f(x(t), \dot{x}(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Remarquer que le calcul nécessite que $f$ soit autonome.

(b) La relation d'Euler se prouve en dérivant l'égalité $h(\lambda v) = \lambda^r h(v)$ par rapport à $\lambda$ puis à poser $\lambda = 1$.
On a donc $rf(x, v) = \frac{\partial f}{\partial v^i}v^i$. On dérive cette expression par rapport à $t$; on obtient :

$$\begin{aligned}
r\frac{d}{dt}f(x, \dot{x}) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial v^i}v^i\right) \\
&= \left[v^i\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i} + \dot{v}^i\frac{\partial f}{\partial v^i}\right] \\
&= \left[v^i\frac{\partial f}{\partial x^i} + \dot{v}^i\frac{\partial f}{\partial v^i}\right] \\
&= \frac{d}{dt}f(x, \dot{x})
\end{aligned}$$

et, puisque $r \neq 1$, on conclut que $\frac{d}{dt}f(x, \dot{x}) = 0$.

(c) Un calcul montre que $H(x,v) = A(x,v)$ pour le Lagrangien $f(x,v) = \frac{1}{2}m \cdot g_{ij}(x)v^i v^j - U(x)$. Donc par (a) on a que $H$ est une intégrale première.

(d) (i) La quantité $H$ représente l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle d'une particule de masse $m$ soumise à un champ de force $F$ de potentiel $U$ (on dit que $H$ est le *Hamiltonien* du système dynamique). Donc (c) nous dit que l'énergie est conservée.

(ii) Par définition, une courbe $\gamma : [a,b] \to M$ sur une variété Riemannienne $(M,g)$ est une *géodésique* si c'est une courbe extrémale pour l'énergie $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|^2 dt$. Cela correspond au Lagrangien $f(x,v) = \frac{1}{2}g_{ij}(x)v^i v^j$ (donc avec $U = 0$). Par le point (c) on déduit que $\|\dot\gamma\|^2 = g_{ij}(x)v^i v^j$ est constante, donc la vitesse $\|\dot\gamma\|$ est aussi constante.

(e) Si $f(x^1 \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n)$ ne dépend pas de la coordonnée $x^i$, alors d'après Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0.$$

**3.4**. There are two steps in this problem.

**Step 1**: The first step requires an idea from linear algebra.

We need to compute the determinant of the metric tensor $g$ of the graph of $\varphi$. We know that $(g_{ij} = \delta_{ij} + \varphi_i\varphi_j)$, where $\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$. This can also be written as

$$(g_{ij}) = I_n + a \cdot a^\top, \quad \text{where} \quad a = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

($a$ is the gradient vector field of the function $\varphi$).

To compute the determinant of this matrix, we observe that 1 is an eigenvalue with multiplicity $n-1$ ( the corresponding eigenspace consists of the space of vectors orthogonal to $a$), and $\lambda = 1 + ||a||^2$ is en eigenvalue with multiplicity 1. Since the determinant of a matrix is the product of its eigenvalues, we obtain that this equals $\det(g_{ij}) = 1 + ||a||^2$.

It follows that

$$\mathrm{Vol}(S_\varphi) = \int_U \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx = \int_U \sqrt{1 + ||a||^2}\, dx$$

**Step 2**: The second step is more geometric. We relate the previous result to the angle with the vertical direction.

A normal vector to the manifold $S_\varphi \subset \mathbf{R}^{n+1}$ at the point $(x, \varphi(x))$ is given by

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ -1 \end{pmatrix}$$

We write this vector as $\boldsymbol{\nu} = (a, -1)$ to simplify. We thus obtain that

$$\cos(\theta(x)) = \frac{\langle (a,-1), e_{n+1}\rangle}{||(a,-1)|| \cdot ||e_{n+1}||} = -\frac{1}{\sqrt{1+||a||^2}}$$

This means that

$$\int_U \frac{1}{|\cos(\theta(x))|}dx = \int_U \sqrt{1+||a||^2}dx = \mathrm{Vol}(S_\varphi)$$

which is what we wish to prove.