Exercice 6.1. Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) muni d'une application bilinéaire (notée $[\cdot,\cdot]$) antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.

(a) Montrer qu'à toute algèbre $\mathcal{A}$ est associée une algèbre de Lie $(\mathcal{A},[\cdot,\cdot])$ où le crochet est défini par $[A,B] := AB - BA$.

(b) En particulier $M_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie (où $[A,B] := AB - BA$). Montrer que l'ensemble $\mathfrak{so}_n \subset M_n(\mathbb{R})$ des $n \times n$ matrices antisymétriques est une sous-algèbre de Lie et calculer sa dimension.

(c) Montrer que $(\mathbb{R}^3, \times)$ (où $\times$ désigne le produit vectoriel) est une algèbre de Lie et qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$.

Solution 6.1. (a) By definition, the lie product $[\cdot,\cdot]$ is certainly bi-linear and antisymmetric. The same computation as in a previous exercise shows also that $[\cdot,\cdot]$ satisfies the Jacobi identity
(b) The set $\mathfrak{so}_n$ is the set of anti-symmetric matrices, which is closed under addition and multiplication by a scalar. In order to show that it is a Lie sub-algebra, we need to show that it is also closed under the commutator (i.e., $[\cdot,\cdot]$, the Lie product of the Lie algebra). Let $A,B \in \mathfrak{so}_n$, and consider

$$[A,B]^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = -[A,B]\,.$$

This proves statement (b). It is clear that the dimension of $\mathfrak{so}_n$ is $\frac{n(n-1)}{2}$.
(c) Given for granted the linearity and anti-symmetry of the vector product, we only need to show that it satisfies the Jacobi identity. This is a property studied in the first courses of calculus, we only briefly remind one of its proof.

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \langle a|c\rangle\, b - \langle a|b\rangle\, c + \langle b|a\rangle\, c - \langle b|c\rangle\, a + \langle c|b\rangle\, a - \langle c|a\rangle\, b = 0\,.$$

In order to show that this Lie algebra is isomorphic to $\mathfrak{so}_3$, we need to find a bijective linear map $i : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}_3$ which preserves the Lie product, i.e., for which

$$[i(a), i(b)] = i(a \times b)\,. \tag{1}$$

We define this map using a convenient basis for $\mathbb{R}^3$ and $\mathfrak{so}_3$. Consider the canonical basis of $\mathbb{R}^3$ given by e_1, e_2, e_3. Recall that

$$e_1 \times e_2 = -e_2 \times e_1 = e_3\,, \quad e_2 \times e_3 = -e_3 \times e_2 = e_1\,, \quad e_3 \times e_1 = -e_1 \times e_3 = e_2\,.$$

Consider the (also canonical) basis for $\mathfrak{so}_3$ given by

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

By simple matrix multiplications, we obtain the relations

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_3\,, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_1\,, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_2\,.$$

Thus we can define the linear map i by setting $i(e_i) = \hat{e}_i$ for all i, and extend it to all $\mathbb{R}^3$ by linearity. This map has all the properties we want.

Exercice 6.2. Notons $\mathfrak{g}$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaisons linéaires de

$$X := y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y := z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z := x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Montrer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et trouver sa dimension. Puis montrer qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$ de l'exercice précédent.

Solution 6.2. To show that $\mathfrak{g}$ is a Lie algebra, we only need to check that the Lie bracket of any two of these vector fields is again an element in $\mathfrak{g}$. In order to do so, we need just compute directly the following relations:

$$[X,Y] = -Z\,, \quad [X,Z] = Y\,, \quad [Y,Z] = -X\,.$$

As seen in the previous exercise, we can build an algebra-isomorphism between $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{so}_3$ by a linear map i defined on the basis by

$$i(X) = \hat{e}_1\,, \quad i(Y) = \hat{e}_2\,, \quad i(Z) = -\hat{e}_3\,.$$

Exercice 6.3. Calculer la métrique du plan hyperbolique en coordonnées polaires Riemanniennes.
(Indication: Se placer dans le modèle du disque de Poincaré.)

Solution 6.3. La définition des coordonnées polaires Riemanniennes a été vue en cours : on se place au voisinage d'un point p, on prend des coordonnées polaires dans T_pM et on les amène dans la variété par l'exponentielle. On déduit du lemme de Gauss une expression pour g,

$$g = dr^2 + f(r,\theta)^2 d\theta^2$$

où f est une fonction lisse.
Il s'agit donc de déterminer la fonction f. Or, dans le modèle du disque, on a

$$g = 4\frac{dx^2 + dy^2}{\left(1 - x^2 - y^2\right)^2}$$

Dans tout ce qui précède, la variable r représente la distance *riemannienne* au point p (dans le cas du disque hyperbolique $p = (0,0)$). On introduit alors une nouvelle variable, ρ qui est la distance *euclidienne* au point $(0,0)$. La métrique euclidienne $dx^2 + dy^2$ s'écrit en coordonnées polaires $d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$ de sorte que la métrique hyperbolique a une expression

$$g = 4\;\frac{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}{\left(1-\rho^2\right)^2}.$$

Il reste alors à exprimer cette métrique en fonction de r. Pour cela, on choisit un chemin de longueur euclidienne ρ et on calcule sa longueur hyperbolique. Prenons le chemin dans le disque de Poincaré $\mathbb{D}^2$ qui s'exprime en coordonnées polaires par

$$\begin{array}{rccc} c: & [0,\rho] & \longrightarrow & \mathbb{D}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,0) \end{array}$$

Ainsi

$$r(\rho) = \int_0^\rho \frac{2dt}{1-t^2} = 2\,\operatorname{artanh}(\rho).$$

On trouve donc $\rho = \tanh(r/2)$ et on peut exprimer $\frac{2\rho}{1-\rho^2}$ en fonction de r de la façon suivante :

$$\frac{2\rho}{1-\rho^2} = \frac{2\tanh(r/2)}{1-\tanh^2(r/2)} = 2\tanh(r/2)\cosh^2(r/2) = 2\cosh(r/2)\sinh(r/2) = \sinh(r).$$

On conclut finalement que

$$g = dr^2 + \sinh^2(r) d\theta^2.$$

Exercice 6.4. Soit N une sous-variété plongée et fermée dans une variété Riemannienne M.
Pour tout point $p \in M\backslash N$, on défini la distance de p à N par

$$d(p,N) := \inf\{d(p,x) | x \in N\}.$$

Si $q \in N$ est un point tel que $d(p,q) = d(p,N)$, et γ est une géodésique minimisante entre p et q, montrer que γ intersecte N de manière orthogonale.

Solution 6.4. On a $\ell(\gamma) = d(p, N) = \inf\{d(p, q) \mid q \in N\}$ $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$ et il s'agit de montrer que $\dot\gamma(1)$ est perpendiculaire à T_qN.
Soient $\xi \in T_qN$ et $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ une courbe telle que $\dot\sigma(0) = \xi$. Alors il existe une variation $\Psi : [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ telle que $\Psi(t, 0) = \gamma(t), \Psi(1, s) = \sigma(s), \Psi(0, s) = p$. Une telle variation existe toujours, car on peut se placer dans une carte autour de q étant donné que la condition que nous voulons démontrer est locale. On peut donc, via une carte, définir $\Psi(t, s) = \gamma(t) + t(\sigma(s) - q)$.
Ensuite, la formule de variation première pour la variation Ψ et le fait que γ soit une géodésique minimisante forcent à avoir $\langle\dot\gamma(1), \xi\rangle = 0$.

Exercice 6.5. (Naturalité de l'exponentielle)
Soit $\phi : M \to N$ une isométrie entre deux variétés Riemanniennes complètes. Montrer que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "d\phi_p"] \arrow[d, "\exp_p"'] & T_{\varphi(p)}N \arrow[d, "\exp_{\phi(p)}"] \\ M \arrow[r, "\phi"] & N \end{tikzcd}$$

Solution 6.5. L'argument se base sur le fait que l'image d'une géodésique par une isométrie est clairement une géodésique. Soient $v \in T_pM$ et $\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$, alors d'une part $\alpha(t) = \phi(\gamma_v(t))$ est la géodésique de N telle que

$$\alpha(0) = \phi(p) \qquad \text{et} \qquad \dot\alpha(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \phi(\gamma_v(t)) = d\phi_p(v).$$

D'autre part, la courbe $\beta(t) = \exp_{\phi(p)}(td\phi_p(v))$ est aussi une géodésique de N telle que $\beta(0) = \phi(p)$ et $\dot\beta(0) = d\phi_p(v)$. On a donc $\alpha(t) = \beta(t)$ pour tout t (car c'est l'unique solution d'une équation différentielle avec conditions initiales prescrites, voir théorème 3.3.1 du cours).
On a donc pour tout t

$$\phi\left(\exp_p(tv)\right) = \phi(\gamma_v(t)) = \alpha(t) = \beta(t) = \exp_{\phi(p)}(td\phi_p(v)).$$

En prenant $t = 1$ on obtient $\phi\left(\exp_p(v)\right) = \exp_{\phi(p)}(d\phi_p(v))$.

Exercice 6.6. Soit (M, g) est une variété riemannienne connexe et soient φ et ψ deux isométries de M telles qu'il existe un point $p \in M$ pour lequel

$$\varphi(p) = \psi(p) \quad \text{et} \quad d\varphi_p = d\psi_p.$$

Montrer que φ et ψ coïncident partout.

Solution 6.6. On considère l'ensemble

$$Q = \{x \in M \mid \varphi(x) = \psi(x) \text{ et } d\varphi_x = d\psi_x\}.$$

Cet ensemble est non vide puisqu'il contient le point p et il est clairement fermé dans M. Montrons que Q est aussi ouvert.
Soit $q \in Q$ un élément quelconque de Q et $\delta > 0$ inférieur au rayon d'injectivité de q (i.e. $x \in M$ et la distance riemannienne de x à q est inférieure à δ). Alors pour tout point $x \in B(q, \delta)$ il existe un unique vecteur $v \in T_qM$ tel que $x = \exp_q(v)$. Par l'exercice précédent on a

$$\varphi(x) = \varphi(\exp_q(v)) = \exp_{\varphi(q)}(d\varphi_q(v)) = \exp_{\psi(q)}(d\psi_q(v)) = \psi(\exp_q(v)) = \psi(x).$$

Ainsi $\varphi(x) = \psi(x)$ pour tout $x \in B(q, \delta)$, ce qui implique évidemment que $d\varphi_x = d\psi_x$ pour tout $x \in B(q, \delta)$, ce qui montre que $B(q, \delta) \subset Q$ et donc Q est une partie ouverte de M.
Étant donné que Q est ouvert, fermé, et non vide, et M est connexe, on en conclut que $Q = M$.