EPFL - Printemps 2022 | M. Troyanov
Variétés Riemanniennes | **Exercices**
Séries 9

Exercice 9.1. Soit p un point quelconque d'une variété Riemannienne (M, g) et $\Pi \subset T_pM$ un 2-plan (= sous-espace vectoriel de dimension 2). Soit Ω un voisinage de $0 \in T_pM$ pour lequel l'exponentielle au point p est bien définie et est un difféomorphisme sur son image. Notons aussi $S = \exp_p(\Omega \cap \Pi)$. Alors S est une surface dans M (appelée la *surface exponentielle du plan* Π) et on note $\bar{g}$ la métrique induite par le plongement $S \subset M$. Quelle est la valeur de

$$\bar{K}_p(\Pi) - K_p(\Pi)?$$

où K est la courbure sectionnelle de (M, g) et $\bar{K}$ est la courbure sectionnelle de (S, g).

Exercice 9.2. (Inégalité de Synge)
a) Une surface N de $\mathbb{R}^3$ est dite *réglée* si pour tout point $p \in N$ il existe un segment de droite euclidienne $[a, b]$ contenu dans N et qui contient le point p en son intérieur (exemples : un plan, un cylindre ou un cône). Prouver que si $N \subset \mathbb{R}^3$ est une surface réglée, alors sa courbure est négative ou nulle.

b) Définir la notion de surface réglée dans une variété riemannienne quelconque et généraliser le résultat précédent.

Exercice 9.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne.

i) Montrer qu'en dimension 2, la courbure scalaire vaut le double de la courbure sectionnelle.

ii) Montrer qu'une variété d'Einstein de dimension 3 a une courbure sectionnelle constante. Est-ce valable en dimension supérieure? *(On rappelle qu'une variété Riemannienne (M, g) est dite d'* Einstein *si $Ric_g = \lambda g$ pour une constante λ).*

Exercice 9.4. emph(Métrique produit) Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit de deux variétées Riemanniennes, muni de la métrique produit $g = g_1 \oplus g_2$. (g_i est une métrique Riemannienne sur M_i et $g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$ où X_i et Y_i sont tangents à M_i). On note R_i le tenseur de courbure de (M_i, g_i).

i) Calculer le tenseur de courbure R de g en fonction de R_1 et R_2.

ii) Même question pour la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

iii) Montrer qu'une métrique produit ne peut pas avoir une courbure sectionnelle positive ou négative. Est-il possible d'avoir une courbure de Ricci positive ou négative?

Exercice 9.5. Le *tenseur d'Einstein* d'une variété (pseudo-)riemannienne (M, g) est le $(0, 2)$ tenseur défini par $G = \mathrm{Ric} - \frac{S}{2} \cdot g$ où S est la courbure scalaire de g.

(a) Montrer que $G = 0$ si et seulement si $\mathrm{Ric}_g = 0$.

(b) Que se passe-t-il si plus généralement $G + \Lambda g = 0$, où $\Lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Remarque : Quand (M, g) est une variété Lorentzienne, $G = 0$ est l'équation d'Einstein de la relativité générale dans le vide, L'équation $G + \Lambda g = 0$ est l'équation d'Einstein avec la constant cosmologique Λ.