Exercice 9.1. On considère la métrique Riemannienne g sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g = \mathrm{e}^{-2z}dx^2 + \mathrm{e}^{2z}dy^2 + dz^2\ .$$

a) Rappeler la formule d'Euler-Lagrange pour l'énergie d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ associée à cette métrique, puis écrire l'équation des géodésiques pour cette métrique.

b) Déduire de (a) les symboles de Christoffel de g.

Dans toute la suite de cette série, on considère $\mathbb{R}^3$ muni de cette métrique g. On dit que la géométrie de $(\mathbb{R}^3, g)$ est la "*géométrie de* SOL", en référence à un groupe de Lie résoluble en dimension 3. Cette géométrie apparaît dans la conjecture de géométrisation des variétés de dimension de William Thurston (Médaillé Fields en 1982).

Exercice 9.2. Sur $\mathbb{R}^3$ on considère les champs de vecteurs

$$X := \mathrm{e}^{z}\frac{\partial}{\partial x} \qquad , \qquad Y := \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial y} \qquad , \qquad Z := \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

(a) Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^3$ ces champs forment une base orthonormée de la métrique g de la question précédente (on dit que le triplet $\{X, Y, Z\}$ est un *repère mobile orthonormé* de la variété riemannienne $(\mathbb{R}^3, g)$).

(b) Calculer les crochets de ces champs de vecteurs.

(c) Montrer que la connexion de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^3, g)$) est l'unique connexion telle que

$$\nabla_X X = Z, \quad \nabla_Y Y = -Z, \quad \nabla_X Z = -X, \quad \nabla_Y Z = Y, \tag{*}$$

et toutes les autres dérivées covariantes parmi ces vecteurs sont nulles.

Exercice 9.3. Calculer les courbures sectionnelles $K(X, Y)$, $K(X, Z)$ et $K(Y, Z)$. Puis en déduire la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

Exercice 9.4. (a) Montrer que la surface $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ est isométrique au plan hyperbolique.

(b) Montrer que $\mathcal{H}$ est une surface totalement géodésique pour la métrique g, par le calcul, puis par des arguments géométriques.

(c) Montrer que la surface $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ est isométrique au plan euclidien.

(d) La surface $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ est-elle totalement géodésique ?