Exercice 9.1. Soit p un point quelconque d'une variété Riemannienne (M, g) et $\Pi \subset T_pM$ un 2-plan (= sous-espace vectoriel de dimension 2). Soit Ω un voisinage de $0 \in T_pM$ pour lequel l'exponentielle au point p est bien définie et est un difféomorphisme sur son image. Notons aussi $S = \exp_p(\Omega \cap \Pi)$. Alors S est une surface dans M (appelée la *surface exponentielle du plan* Π) et on note $\bar{g}$ la métrique induite par le plongement $S \subset M$. Quelle est la valeur de

$$\bar{K}_p(\Pi) - K_p(\Pi)?$$

où K est la courbure sectionnelle de (M, g) et $\bar{K}$ est la courbure sectionnelle de (S, g).

Solution 9.1. Il faut remarquer que la seconde forme fondamentale de S au point p est nulle. Donc par une application de la formule de Gauss on a $K_p(\Pi) = \bar{K}_p(\Pi)$.

On peut remarquer que cette formule nous donne une interprétation de la courbure sectionnelle

---

Exercice 9.2. (Inégalité de Synge)
a) Une surface N de $\mathbb{R}^3$ est dite *réglée* si pour tout point $p \in N$ il existe un segment de droite euclidienne $[a, b]$ contenu dans N et qui contient le point p en son intérieur (exemples : un plan, un cylindre ou un cône). Prouver que si $N \subset \mathbb{R}^3$ est une surface réglée, alors sa courbure est négative ou nulle.

b) Définir la notion de surface réglée dans une variété riemannienne quelconque et généraliser le résultat précédent.

Solution 9.2. (a) C'est une application directe de la formule de Gauss, en choisissant un des vecteurs dans la direction d'une géodésique.

(b) Un surface réglée dans une variété quelconque est une surface M telle que par tout point $p \in M$, il passe un segment de géodésique de la variété ambiante qui contient p et qui est entièrement contenu dans M. On généralise le résultat en utilisant à nouveau la formule de Gauss.

Exercice 9.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne.

i) Montrer qu'en dimension 2, la courbure scalaire vaut le double de la courbure sectionnelle.

ii) Montrer qu'une variété d'Einstein de dimension 3 a une courbure sectionnelle constante. Est-ce valable en dimension supérieure? *(On rappelle qu'une variété Riemannienne (M, g) est dite d'* Einstein *si $Ric_g = \lambda g$ pour une constante λ).*

Solution 9.3. In dimension 2, there is only one plane in a given tangent space T_pM,let us denote its sectional curvature by k_p. Let e_1, e_2 be an orthonormal basis of T_pM Then:

$$Ric(e_1, e_1) = trace(X \mapsto R(X, e_1)e_1) = g(R(e_1, e_1)e_1, e_1) + g(R(e_2, e_1)e_1, e_2) = 0 + k_p.$$

Similarly $Ric(e_2, e_2) = k_p$. Hence $Scal = trace(Ric) = 2k_p$.

We assume that M has dimension 3 and is Einstein, that is $Ric = \lambda g$, thus for any unit vector v in T_pM $Ric(v, v) = \lambda$. Now pick any plane $\Pi \subset T_pM$, and let e_1, e_2, e_3 be an orthonormal basis of T_pM such that e_1, e_2 is an orthonormal basis of Π. We compute:

$$\lambda = Ric(e_1, e_1) = K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3).$$

Doing this for $\mathrm{Ric}(e_2, e_2)$ and $Ric(e_3, e_3)$, and writing K_{ij} for $K(e_i, e_j)$, we get the system:

$$\begin{cases} K_{12} + K_{13} = \lambda \\ K_{12} + K_{23} = \lambda \\ K_{13} + K_{23} = \lambda. \end{cases}$$

This is an invertible system in the K_{ij}, whose only solution is given by $K_{12} = K_{13} = K_{23} = \lambda/2$. In the end $K(\Pi) = \lambda/2$, and hence doesn't depend on Π. We're done.

The result does not hold in dimension ≥ 4. For instance the manifold $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ with its product metric is an Einstein manifold but does not have constant sectional curvature.

Exercice 9.4. *(Métrique produit)* Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit de deux variétées Riemanniennes, muni de la métrique produit $g = g_1 \oplus g_2$. (g_i est une métrique Riemannienne sur M_i et $g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$ où X_i et Y_i sont tangents à M_i). On note R_i le tenseur de courbure de (M_i, g_i).

i) Calculer le tenseur de courbure R de g en fonction de R_1 et R_2.

ii) Même question pour la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

iii) Montrer qu'une métrique produit ne peut pas avoir une courbure sectionnelle positive ou négative. Est-il possible d'avoir une courbure de Ricci positive ou négative?

Solution 9.4. Nous étudions d'abord la connexion de Levi-Civita sur la variété produit, puis la courbure.

The connection

For this we need some information about the Levi-Civita connection of (M, g). However it will be enough for our purpose to only compute it on some special vector fields. The vector fields we will consider which come from vector fields on each of the M_i.
Recall that, for every $p = (p_1, p_2) : in M_1 \times M_2$, $T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2$ is canonically isomorphic to $T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$, thus any vector $X_p \in T_p M$ can be uniquely written as $X_p = (X_1)_{p_1} + (X_2)_{p_2}$[1] where $(X_1)_{p_1} \in T_{p_1} M_1$ and $(X_2)_{p_2} \in T_{p_2} M_2$.
Now pick any vector field on M_1, $X_1 : p_1 \to (X_1)_{p_1} \in T_{p_1} M_1$. From this we can define a vector fields on M by $p = (p_1, p_2) \mapsto (X_1)_{p_1} \in T_{p_1} M_1 \subset T_p M$. We will also denote this vector field by X_1. Similarly from a vector field on X_2 we can define a vector field on M, that will also be denoted by M_2.
From now on every vector field which has 1 or 2 as a subscript comes from the above construction.
The Levi-Civita of (M, g) satisfies the following properties:

(i) $\nabla_{X_1} Y_2 = \nabla_{Y_2} X_1 = 0$.

(ii) $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla^1_{X_1} Y_1$[2],

(iii) $\nabla_{X_2} Y_2 = \nabla^2_{X_2} Y_2$,

First let us prove that $\nabla_{X_1} Y_2 = 0$, we will use Koszul formula:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) =& Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &+ g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Set $X = X_1$, $Y = Y_2$ and $Z = Z_1$ for now, we get:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X_1} Y_2, Z_1) =& X_1 g(Y_2, Z_1) + Y_2 g(X_1, Z_1) - Z_1 g(X_1, Y_2) \\ &+ g([X_1, Y_2], Z_1) - g([X_1, Z_1], Y_2) - g([Y_2, Z_1], X_1). \end{aligned}$$

This will vanish for the following reasons:

- The inner product of a vector on M_1 with a vector on M_2 is zero by definition of g.
- The Lie bracket of two vector fields on M_1 is again a vector field on M_1.
- The Lie bracket of a vector field on M_1 with a vector field on M_2 is zero.

[1] We could also write $X_p = ((X_1)_{p_1}, (X_2)_{p_2})$.

[2] On the left, ∇ is applied to vector fields on M, on the right hand side, ∇^1 is applied to vector fields on M_1. Thus this equality makes sense only using the embedding of vector fields on M_1 to vector fields on M that we have seen before. You should keep that in mind.

- The inner product of two vectors on M_1, as a function on M, doesn't depend on p_2.

For instance $Y_2 g(X_1, Z_1)$ vanishes because $g(X_1, Z_1)$ is a function on M which depends only on p_1 and Y_2 has no component along M_1, and $g([X_1, Z_1], Y_2) = 0$ because $[X_1, Z_1]$ is a vector field on M_1 and Y_2 is a vector field on M_2.
Similarly one shows that $2g(\nabla_{X_1} Y_2, Z_2) = 0$, which will imply that $\nabla_{X_1} Y_2 = 0$. Hence property **1.** is proved.
For property **2.**, first show that $2g(\nabla_{X_1} Y_1, Z_2) = 0$, in a similar way to what we already did. Then, plugging only vector fields on M_1 in:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X_1} Y_1, Z_1) =& X_1 g(Y_1, Z_1) + Y_1 g(X_1, Z_1) - Z_1 g(X_1, Y_1) \\ &+ g([X_1, Y_1], Z_1) - g([X_1, Z_1], Y_1) - g([Y_1, Z_1], X_1). \end{aligned}$$

Since $g = g_1$ on vector fields from M_1, what we get is exactly the Koszul formula for ∇^1, this ends the proof that $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla^1_{X_1} Y_1$.
We have proved all we need about the connection now!

The curvature

Let X be a vector field of the form $X = X_1 + X_2$ with X_1 a vector field on M_1 and X_2 a vector field on M_2. Similarly let $Y = Y_1 + Y_2$ and $Z = Z_1 + Z_2$. We have:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \nabla_{Y_1 + Y_2}(Z_1 + Z_2) \\ &= \nabla_{X_1 + X_2}(\nabla^1_{Y_1} Z_1 + \nabla^2_{Y_2} Z_2) \\ &= \nabla^1_{X_1} \nabla^1_{Y_1} Z_1 + \nabla^2_{X_2} \nabla^2_{Y_2} Z_2. \end{aligned}$$

We can then get the curvature tensor from there:

$$R(X, Y)Z = R_1(X_1, Y_1)Z_1 + R_2(X_2, Y_2)Z_2.$$

(A similar formula holds for the $\binom{0}{4}$ tensor.)
Taking traces one gets:

$$Ric(X, Y) = Ric_1(X_1, Y_1) + Ric_2(X_2, Y_2)$$

and

$$Scal = Scal_1 + Scal_2.$$

Using the formula for R, we get that, for 2 vectors $u, v \in T_p M$:

$$K(u, v) = \begin{cases} K_1(u, v) & \text{if } u, v \in T_{p_1} M_1, \\ K_2(u, v) & \text{if } u, v \in T_{p_2} M_2, \\ 0 & \text{if } u \in T_{p_1} M_1, v \in T_{p_2} M_2. \end{cases}$$

In particular a product metric can never have everywhere non vanishing sectionnal curvature.
However it can have positive or negative Ricci curvature, for instance assume $Ric_1 = k g_1$ and $Ric_2 = k g_2$, then $Ric = k(g_1 \oplus g_2) = kg$. Similarly, on can have strictliy positive scalar curvature.

An interesting open question: *We know the sphere $\mathbb{S}^2$ with its standard metric has constant sectionnal curvature* 1.
In this exercise we proved that $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ with the product metric has nonnegative sectional curvature but does not have positive sectional curvature everywhere. It has been conjectured by Hopf that $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ cannot be endowed with a metric with (everywhere) positive sectional curvature, and this question has been opened for many decades.

Exercice 9.5. Le *tenseur d'Einstein* d'une variété (pseudo-)riemannienne (M, g) est le $(0, 2)$ tenseur défini par $G = \mathrm{Ric} - \frac{S}{2} \cdot g$ où S est la courbure scalaire de g.

(a) Montrer si $\dim(M) \geq 3$ alors $G = 0$ si et seulement si $\mathrm{Ric}_g = 0$.

(b) Que se passe-t-il si plus généralement $G + \Lambda g = 0$, où $\Lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Remarque : Quand (M, g) est une variété Lorentzienne, $G = 0$ est l'équation d'Einstein de la relativité générale dans le vide, L'équation $G + \Lambda g = 0$ est l'équation d'Einstein avec la constant cosmologique Λ.

Solution 9.5. (a) Il faut montrer que $G = 0$ si et seulement si $\mathrm{Ric} = 0$. Ce résultat est vrai seulement si $n \geq 3$. En effet la contraction (trace) de G est

$$\sum_i G(E_i, E_i) = S - \frac{n}{2}S = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 0$$

où $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est une base orthonormée de T_pM. Donc $G = 0$ implique $\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}S = 0$. Le sens inverse $\mathrm{Ric} = 0 \Rightarrow G = 0$ est immédiat puisque S est la contraction (trace) de Ric.

(b) Supposons maintenant que $G + \Lambda g = 0$ pour une constante Λ, alors en contractant à nouveau on a

$$0 = \sum_i G(E_i, E_i) + \Lambda n = (1 - \frac{n}{2})S + n\Lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{2n}{n-2}\Lambda$$

et donc

$$\mathrm{Ric} = \tfrac{1}{2}Sg + G = \tfrac{n}{n-2}\Lambda g - \Lambda g = \tfrac{2}{n-2}\Lambda g.$$

Remarque Une métrique riemannienne vérifiant cette condition s'appelle une *métrique d'Einstein* (terminologie en usage chez les mathématiciens, plutôt que chez les physiciens). Remarquons que cette condition dit que la courbure de Ricci est constante.