Exercice 10.1. On considère la métrique Riemannienne g sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g = \mathrm{e}^{-2z}dx^2 + \mathrm{e}^{2z}dy^2 + dz^2 \ .$$

a) Rappeler la formule d'Euler-Lagrange pour l'énergie d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ associée à cette métrique, puis écrire l'équation des géodésiques pour cette métrique.

b) Déduire de (a) les symboles de Christoffel de g.

Dans toute la suite de cette série, on considère $\mathbb{R}^3$ muni de cette métrique g. On dit que la géométrie de $(\mathbb{R}^3, g)$ est la "*géométrie de* SOL", en référence à un groupe de Lie résoluble en dimension 3. Cette géométrie apparaît dans la conjecture de géométrisation des variétés de dimension de William Thurston (Médaillé Fields en 1982).

Solution 10.1. (a) Le Lagrangien pour l'énergie d'une courbe de classe C^2 s'écrit

$$f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2z}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{2z}\dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Les équations d'Euler-Lagrange correspondantes s'écrivent £

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}.$$

Avec quelques calculs, on trouve alors les équations des géodésiques sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x}\dot{z} & = & 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{y}\dot{z} & = & 0 \\ \ddot{z} + \mathrm{e}^{-2z}\dot{x}^2 - \mathrm{e}^{2z}\dot{y}^2 & = & 0\,. \end{cases}$$

(b) Il y a $3^3 = 27$ symboles de Christoffel, ils apparaissent (entre autres) dans l'équation des géodésiques :

$$\ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^{3}\Gamma_{ij}^k\dot{x}_i\dot{x}_j = \ddot{x}^k + \sum_{i=1}^{3}\Gamma_{ii}^k\dot{x}_i^2 + 2\sum_{i<j}\Gamma_{ij}^k\dot{x}_i\dot{x}_j = 0.$$

Il sera commode de remplacer les indices i,j par les symboles x,y,z. On a donc par exemple

$$\ddot{x} + \Gamma_{xx}^x\dot{x}^2 + \Gamma_{yy}^x\dot{y}^2 + \Gamma_{zz}^x\dot{z}^2 + 2\Gamma_{xy}^x\dot{x}\dot{y} + 2\Gamma_{xz}^x\dot{x}\dot{z} + 2\Gamma_{yz}^x\dot{y}\dot{z} = 0, \quad \text{etc.}$$

En comparant avec les équations des géodésiques trouvées plus haut on trouve

$$\Gamma_{xz}^x = \Gamma_{zx}^x = -1, \quad \Gamma_{yz}^y = \Gamma_{zy}^y = +1, \quad \Gamma_{xx}^z = \mathrm{e}^{-2z}, \quad \Gamma_{yy}^z = -\mathrm{e}^{2z},$$

et tous les autres symboles de Christoffel sont nuls.

Exercice 10.2. Sur $\mathbb{R}^3$ on considère les champs de vecteurs

$$X := \mathrm{e}^z\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad Y := \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad Z := \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

(a) Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^3$ ces champs forment une base orthonormée de la métrique g de la question précédente (on dit que le triplet $\{X, Y, Z\}$ est un *repère mobile orthonormé* de la variété riemannienne $(\mathbb{R}^3, g)$).

(b) Calculer les crochets de ces champs de vecteurs.

(c) Montrer que la connexion de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^3, g))$ est l'unique connexion telle que

$$\nabla_X X = Z, \quad \nabla_Y Y = -Z, \quad \nabla_X Z = -X, \quad \nabla_Y Z = Y, \tag{*}$$

et toutes les autres dérivées covariantes parmi ces vecteurs sont nulles.

Solution 10.2. (a) Se vérifie par calcul direct.

(b) On a les crochets

$$[X, Y] = 0 \quad , \quad [Z, X] = X \quad , \quad [Z, Y] = -Y \quad .$$

(c) On observe que $(*)$ détermine une unique connexion et que cette connexion est sans torsion (utiliser les calculs en (b)). Cette connexion est aussi compatible avec la métrique g, ce qu'on vérifie par le calcul. Par exemple d'une part $Xg(Y, Z) = 0$ et d'autre part

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g(0, Z) + g(Y, -X) = 0.$$

On vérifie de même les autres cas.

On peut aussi vérifier ces identités en utilisant les symboles de Christoffel calculés dans l'exercice précédent.

Exercice 10.3. Calculer les courbures sectionnelles $K(X, Y)$, $K(X, Z)$ et $K(Y, Z)$. Puis en déduire la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

Solution 10.3. On a $K(X, Y) = 1$ et $K(X, Z) = K(Y, Z) = -1$.

Exercice 10.4. (a) Montrer que la surface $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ est isométrique au plan hyperbolique.

(b) Montrer que $\mathcal{H}$ est une surface totalement géodésique pour la métrique g, par le calcul, puis par des arguments géométriques.

(c) Montrer que la surface $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ est isométrique au plan euclidien.

(d) La surface $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ est-elle totalement géodésique ?

Solution 10.4. (a) La surface $\mathcal{H}$ est difféomorphe au plan $\mathbb{R}^2$, avec coordonnées (x, z) et la première forme fondamentale est $g = \mathrm{e}^{-2z}dx^2 + dz^2$. Si on fait le changement de coordonnées $u = x$ et $v = \mathrm{e}^z$, alors $dz = vdv$ et donc

$$g = \frac{du^2 + dv^2}{v^2},$$

cela montre que $(\mathcal{H}, g)$ est isométrique au demi-plan de Poincaré.

(b) Par le calcul : On a vu plus haut que la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g vérifie $\nabla_X X = Z, \quad \nabla_X Z = -X$ et $\nabla_Z X = 0 = \nabla_Z Z = 0$

$$\nabla_X X = Z, \quad \nabla_X Z = -X, \quad \nabla_Z X = 0 = \nabla_Z Z = 0 \tag{*}$$

Argument géométrique : La transformation $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ est une isométrie pour la métrique g dont les points fixes sont l'hypersurface $\mathcal{H}$, cette hypersurface est donc totalement géodésique.

(c) La surface $\mathcal{F}$ est difféomorphe au plan $\mathbb{R}^2$, avec coordonnées (x, y) et la première forme fondamentale est $g = dx^2 + dy^2$, donc $\mathcal{F}$ est isométrique au plan euclidien.

(d) La réponse est négative $\mathcal{F}$, n'est pas totalement géodésique. Si $\mathcal{F}$ était totalement géodésique, sa courbure sectionnelle serait nulle (car $\mathcal{F}$ est isométrique au plan euclidien. Mais on a vu plus haut que $K(\mathcal{F}) = +1$.
On peut aussi voir que la seconde forme fondamentale n'est pas nulle, en fait $B(X, X) = Z$, $B(Y, Y) = -Z$ et $B(X, Y) = 0$.