Exercice 11.1. (a) Rappeler la définition de la notion d'*action de groupe* sur un ensemble.

(b) Supposons que le groupe Γ agit sur l'ensemble X, rappeler les notions d'*orbite* et de *stabilisateur* d'un élément $x \in X$.

(c) Que veut-on dire lorsqu'on dit que Γ agit *librement* sur X ?

(d) Comment définit-on le quotient X/Γ.

(e) Montrer qu'il y a une bijection canonique entre le quotient X/Γ et l'ensemble des orbites de X pour l'action de Γ.

(f) Qu'est-ce qu'une action *transitive* ? Combien y a-t-il d'orbites lorsque l'action est transitive ?

(g) Montrer que si Γ agit transitivement sur X, alors il y a une bijection canonique entre X et Γ/Γ_x, où on a noté Γ_x le stabilisateur de x.

Solution 11.1. (a) Etant donnés un groupe Γ et un ensemble X, une action de Γ sur X est une application: $\Gamma \times X \to X$, notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$, telle que

1) $ex = x$, $\forall x \in X$, où $e \in \Gamma$ est l'élément neutre.

2) $g(hx) = (gh)x$, $\forall g, h \in \Gamma$ et $\forall x \in X$.

(b) L'*orbite* d'un point $x \in X$ sous l'action Γ est l'ensemble $O(x) = \Gamma \cdot x = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$. C'est un sous-ensemble de X.

Le *stabilisateur* d'un point est défini par $\mathrm{Stab}(x) = \{\gamma \in \Gamma | \gamma \cdot x = x\}$. C'est un sous-groupe de Γ (on le note aussi $\Gamma_x \subset \Gamma$).

(c) On dit que le groupe agit *librement* sur X si pour tout $x \in X$ et tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$, on a $\gamma x \neq x$. De façon équivalente, le stabilisateur de tout point est trivial (i.e. $\mathrm{Stab}(x) = \{e\}$, $\forall x \in X$).

(d) Si le groupe Γ agit sur X, on peut définir une relation sur X par $x \sim y$ si et seulement si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $y = \gamma x$. On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence et on note $X/\Gamma = X/\sim$ le quotient.

(e) La classe d'équivalence de $x \in X$ pour la relation que l'on vient de définir est

$$[x] = \{y \in X \mid \exists \gamma \in \Gamma \ t.q. \ y = \gamma x\} = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\},$$

qui n'est rien d'autre que l'orbite du point x. Donc le quotient X/Γ (qui est l'ensemble des classes d'équivalence), est aussi l'ensemble des orbites.

(f) L'action de Γ sur X est *transitive* si $\forall\, x, y \in X$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma x = y$. Cela signifie exactement que tous les points $y \in X$ appartiennent à l'orbite de x. On a donc $O(x) = X$ et il n'y a qu'une seule orbite.

(g) On va construire plus généralement une bijection entre le quotient Γ/Γ_x et l'orbite de x. Définissons l'application

$$F : \Gamma \to O(x), \qquad F(\gamma) = \gamma x.$$

Alors F est surjective par définition de l'orbite $O(x)$. Observons que $F(\gamma_1) = F(\gamma_2)$ si et seulement si seulement si $\gamma_1 x = \gamma_2 x$. Ceci est équivalent à $\gamma_2^{-1}\gamma_1 x = x$, c'est-à-dire $\gamma_2^{-1}\gamma_1 \in \Gamma_x$. L'application F induit alors une application $f : \Gamma/\Gamma_x \to X$, qui est bijective.

Exercice 11.2. Soit X un espace topologique localement compact et Γ un groupe qui agit par homéomorphismes sur X. On dit que l'action est *proprement discontinue* si pour tout compact $Q \subset X$ on a

$$\mathrm{Card}\left(\{\gamma \in \Gamma \mid Q \cap \gamma Q \neq \emptyset\}\right) < \infty.$$

(a) Donner un exemple d'action proprement discontinue d'un groupe infini Γ, puis donner un contre-exemple.

(b) Démontrer que si Γ agit librement et de façon proprement discontinue sur l'espace topologique X et si on note $Y = X/\Gamma$, que l'on muni de la topologie quotient, alors la projection canonique $\pi : X \to Y$ est un revêtement.

(c) Montrer que si M est une variété différentiables et si Γ agit librement et de façon proprement discontinue sur M par difféomorphismes, alors le quotient $N = M/\Gamma$ admet une structure naturelle de variété différentiable et la projection canonique $\pi : M \to N$ est un difféomorphisme local.

(d) Montrer avec un exemple que le point précédent est faux si on ne suppose pas que l'action est libre.

Solution 11.2. (a) Un exemple simple d'action proprement discontinue est l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation; on la note additivement $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(k, x) \mapsto x + k$. Toute partie compacte $Q \subset \mathbb{R}$ étant bornée, il est clair que $\mathrm{Card}\,(\{k \in \mathbb{Z} \mid Q \cap (Q + k) \neq \emptyset\}) < \infty$. Le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle.

Une variante est l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, aussi par translation. Le quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est homéomorphe au tore de dimension n.

Un contre-exemple est donné par l'action triviale de $\mathbb{Z}$ sur un point. Plus généralement une action d'un groupe infini sur un espace topologique compact ne peut clairement jamais être proprement discontinue.

(b) La preuve se fait en plusieurs étapes.

On montre d'abord que tout point $x \in X$ admet un voisinage relativement compact V tel que $\gamma\bar{V} \cap \bar{V} = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$.

En effet, puisque X est localement compact, chaque point $x \in X$ admet un voisinage ouvert $W \subset X$ qui est relativement compact (i.e. son adhérence $\bar{W}$ est compacte). Par ailleurs puisque l'action est proprement discontinue, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\bar{W} \cap \bar{W} \neq \emptyset\}$ est fini. Notons cet ensemble $\{\gamma_1 = e, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$.

On note maintenant $x_i = \gamma_i x$ (pour $i = 1, ..., n$). On affirme que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. En effet en utilisant que l'action est libre on a:

$$x_i = x_j \iff \gamma_i x = \gamma_j x \iff \gamma_j^{-1}\gamma_i x = x \iff \gamma_j^{-1}\gamma_i = e \iff \gamma_i = \gamma_j \iff i = j.$$

L'espace X est séparé (car il est supposé localement compact), on peut donc trouver des voisinages W_i de chaque x_i qui sont relativement compacts et deux-deux disjoints ($W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$), et disjoints de W (i.e. $W_i \cap W = \emptyset$).

Considérons l'ouvert $V = W \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i^{-1} W_i) \subset X$. C'est un ouvert car $\gamma_i^{-1} W_i$ est homéomorphe à W_i et c'est un voisinage de x car $\gamma_i^{-1} x_i = x$ pour tout x. De plus $\bar{V}$ est compact.

Nous affirmons que $\bar{V} \cap \gamma\bar{V} = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$. En effet, si $\gamma \notin \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$, alors $\bar{V} \cap \gamma\bar{V} \subset \bar{W} \cap \gamma\bar{W} = \emptyset$. Et si $\gamma = \gamma_i$ avec $i \neq 1$, alors $\bar{V} \cap \gamma_i\bar{V} \subset \bar{W} \cap \bar{W}_i = \emptyset$.

Deuxième étape : On montre que la projection $\pi : X \to Y = X\Gamma$ est un homéomorphisme local. Cette projection est continue par définition de la topologie quotient, et on a montré que tout point x admet un voisinage relativement compact V tel que $\gamma\bar{V} \cap \bar{V} = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$. Cette condition signifie que l'ensemble $\bar{V}$ contient au plus un point de chaque orbite, ou de façon équivalente que la restriction de π à $\bar{V}$ est injective. Donc $\pi : \bar{V} \to \pi(\bar{V}) \subset Y$ est un homéomorphisme (toute application bijective et continue définie sur un compact est un homéomorphisme). On a montré que la projection est un homéomorphisme local.

Troisième étape. On montre que π est un revêtement. Soit $y \in Y$ un point quelconque et choisissons une préimage $x \in \pi^1(y)$. Alors $\pi^1(y)$ n'est rien d'autre que l'orbite $O(x)$ du point x. Choisissons maintenant un voisinage $V \subset X$ de x tel que $\bar{V} \cap \gamma\bar{V} = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$ (on a construit un tel voisinage à la première étape) et notons $U = \pi(V) \subset Y$. Alors la restriction de π à V est un homéomorphisme sur U et en particulier U est un voisinage de y. De plus, la préimage de U est l'ensemble

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma V.$$

Par construction cet ensemble est la réunion disjointe des γV et la restriction de π à γV est un homéomorphisme sur U car $\pi(\gamma x) = \pi(x)$ pour tout γ. On a construit pour tout $y \in Y$ un voisinage U de y qui est recouvert régulièrement par π, donc π est un revêtement.

(c) On observe d'abord que tout point de N admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de M, ce qui implique que N est une variété topologique. Soit $\mathcal{A}$ l'atlas maximal de M pour la structure différentiable (disons C^∞). On va construire un atlas différentiable $\mathcal{B}$ pour N. Il faut aussi montrer que la projection $\pi M \to N = M/\Gamma$ est un difféomorphisme local.

On note $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ l'ensemble des cartes $(V, \phi) \in \mathcal{A}$ telles que la restriction de la projection π à l'ouvert V est un homéomorphisme sur un ouvert $U = \pi(U) \subset N$ (intuitivement on ne considère que les cartes de $\mathcal{A}$ dont le domaine est "assez petit"). Alors $\mathcal{A}'$ est encore un atlas pour la structure différentiable de M.

Pour chaque carte $(V, \phi) \in \mathcal{A}'$, on construit la carte de (U, ψ) de N définie par $U = \pi(V)$ et $\psi = \phi \circ \pi^{-1}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces cartes. Les domaines des cartes de $\mathcal{B}$ recouvrent N et les changements de cartes sont des changements de cartes de l'atlas $\mathcal{A}$, qui sont des applications C^∞.

De plus la restriction de π à l'ouvert V est un difféomorphisme de V sur U puisque c'est un homéomorphisme et sa représentation dans les cartes est l'application $\psi \circ \pi \circ \phi^{-1}$, qui est l'identité par définition de ψ. On a prouvé que M/Γ possède une structure différentiable et que le revêtement $\pi : M \to M/\Gamma$ est un difféomorphisme local.

(d) Si l'action n'est pas libre, la projection $\pi : X \to X/\Gamma$ n'est pas un homéomorphisme local. Il est facile de construire des exemples. Par exemple le groupe à deux éléments $\{\pm 1\}$ agit sur la droite réelle $\mathbb{R}$ par multiplication. Le quotient $\mathbb{R}/\{\pm 1\}$ est homéomorphe à la demi-droite $[0, \infty)$ et la projection est (équivalente à) l'application $x \mapsto |x|$ qui n'est pas un homéorphisme local.

Un deuxième exemple est l'action du groupe cyclique $G = \{e^{2k\pi/n} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$ par multiplication sur le plan complexe $\mathbb{C}$. Le quotient est un cône d'angle $2\pi/n$ et la projection $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/G$ n'est injective dans aucun voisinage de 0.

Un troisième exemple est donné par un sous-groupe fini G du groupe orthogonal $O(3)$ agissant sur $\mathbb{R}^3$. Par exemple le groupe des isométries d'un polyèdre régulier tel que le cube ou le dodécaèdre. Dans ce cas le quotient $\mathbb{R}^3/G$ n'est pas une variété topologique (il n'y a pas d'homéomorphisme local avec un ouvert de $\mathbb{R}^3$).

Définition. Un espace topologique dont chaque point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ ou au quotient U/G d'un ouvert de $U \subset \mathbb{R}^n$ par l'action d'un groupe fini G s'appelle une *orbifold* (ou une V-variété, mais cette terminologie est tombée en désuétude). Ainsi les orbifolds sont des types de "variétes avec des points singuliers" qui sont associées à des actions de groupes finis.

Exercice 11.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne est Γ un groupe agissant par isométries sur M (i.e. pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $x \mapsto \gamma \cdot x$ est une isométrie de (M, g)). Supposons que l'action de Γ est libre et proprement discontinue, montrer alors que l'on peut construire une unique métrique riemannienne g' sur la variété $N = M/\Gamma$ pour laquelle la projection canonique $\pi : M \to N$ est une isométrie locale.

Montrer ensuite que (N, g') est complète si et seulement si (M, g) est complète.

Solution 11.3. Par les exercices précédents, on sait que $\pi : M \to N$ est un revêtement et un difféomorphisme local.
Le principe pour construire une métrique riemannienne sur N telle que $\pi : M \to N$ est une isométrie locale est très simple. Étant donné un point quelconque $q \in N$, on choisit un point $p \in \pi^{-1}(q)$ (un tel point existe car π est surjective). Alors la différentielle de π en p est un isomorphisme $d\pi_p : T_pM \to T_qN$ (car π est un difféomorphisme local). On défini alors

$$g'_q(X, Y) = g_p(\pi_p^{-1}(X), \pi_p^{-1}(Y)),$$

en sorte que $d\pi_p$ est une isométrie entre les espaces euclidiens (T_pM, g_p) et (T_qN, g'_q).
Nous devons vérifier trois choses : (i) que cette construction est valide, i.e. que g'_q ne dépend pas du choix de $p \in \pi^{-1}(q)$, (ii) que $\pi : (M, g) \to (N, g')$ est une isométrie locale, et (iii) que g' est bien une métrique Riemannienne sur N, i.e. que g'_q dépend différentiablement de q.
Le point (i) est le plus important. Il découle simplement du fait que le groupe Γ agit par isométries car si $p' \in \pi^{-1}(q)$ est un autre point tel que $\pi(p') = \pi(p) = q$, alors il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $p' = \gamma p$. Or $\gamma : M \to M$ est une isométrie globale, donc $d\gamma_p : T_pM \to T_{p'}M$ est une isométrie. De plus $\pi = \pi \circ \gamma$, on a donc

$$g'_q(X, Y) = g_p(\pi_p^{-1}(X), \pi_p^{-1}(Y)) = g_{p'}(\pi_{p'}^{-1}(X), \pi_{p'}^{-1}(Y)),$$

ce qui prouve l'indépendance du choix du point dans $\pi^{-1}(q)$.
Le point (ii) est maintenant clair car la construction montre que $d\pi_p : T_pM \to T_{\pi(p)}M$ est une isométrie pour pour tout point $p \in M$. Le point (iii) vient du fait que π est un difféomorphisme local.

Il reste à montrer que (N, g') est complète si et seulement si (M, g) est complète. On a déjà montré à l'exercice 7.5 que M complète $\Rightarrow$ N complète. Dans le sense inverse on peut utiliser Hopf-Rinow. On suppose que (N, g') est complète et on se donne une géodésique $\alpha : I \to M$. Alors la projection $\beta = \pi \circ \alpha : I \to N$ est une géodésique de N et on peut le prolonger en une géodésique complète $\tilde{\beta} : \mathbb{R} \to N$ car N est complète. Par le principe de relèvement des chemins, on peut maintenant relever $\tilde{\beta}$ en une courbe $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to M$ qui est clairement une géodésique de M. Cela montre que M est complète.