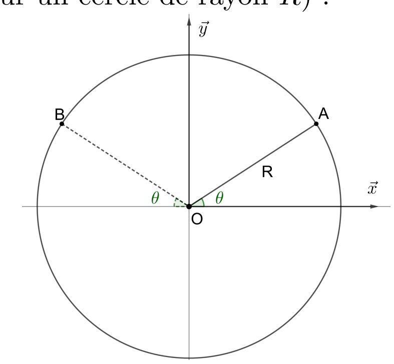
Exercices

Exercice 1 *Dérivations*
Calculer les dérivées par rapport au temps (t) des fonctions suivantes :

1. $\cos(t)$
2. $\sin(t)$
3. $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$
4. $\ln(t)$
5. $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$
6. t^α $(\alpha \neq 0)$
7. $\sin(t)\cos(t)$
8. $t\cos(t)$
9. $t\cos(t)\sin(t)$
10. $\sin(t^2)$

Exercice 2 *Direction les vecteurs !*
On considère les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ suivants (A et B sur un cercle de rayon R) :

a) Exprimer les composantes de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de R et θ.
b) Représenter $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.
c) Exprimer les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
d) Refaire le dessin avec $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$



Exercice 3 *Dérivations, on part à la dérive*
Soit $\theta(t) = \omega t$ une fonction du temps.
Calculer les dérivées par rapport au temps des fonctions :

1. $\cos(\theta)$
2. $\sin(\theta)$
3. $\tan(\theta)$
4. $e^{i\theta}$
5. $\sin(\theta)\cos(\theta)$

Exercice 4 *Les vecteurs, c'est la base*
Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{vmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{vmatrix}$ en coordonnées cartésiennes.

a) Représenter $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour $\theta = \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3};\ \pi;\ -\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$
b) Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$
c) Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$

Exercice 5 *Analyse dimensionnelle*

1. A l'aide de l'analyse dimensionnelle, vérifier l'exactitude de la formule suivante : Chemin x parcouru durant le temps t par un point matériel d'accélèration a, de vitesse initiale v_0 et de position initiale x_0 :
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$
2. Quelle es la bonne formule pour la portée D d'un projectile lancé à la vitesse v_0 sous un angle α par rapport à l'horizontale, avec g accélèration de la pesanteur :
   (a) $D = \frac{g}{v_0}\sin 2\alpha$
   (b) $D = \frac{v_0}{g}\sin 2\alpha$
   (a) $D = \frac{g^2}{v_0}\sin 2\alpha$
   (b) $D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

Exercice 6 *Dérivations, le retour*

Soit θ une fonction du temps $\theta(t)$ quelconque. On notera $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ la dérivée de θ par rapport au temps.
Calculer la dérivée par rapport au temps de $f(t)$ pour :
(Attention, on n'a pas explicité $\theta(t)$, il est ici implicite que θ est une fonction du temps t)

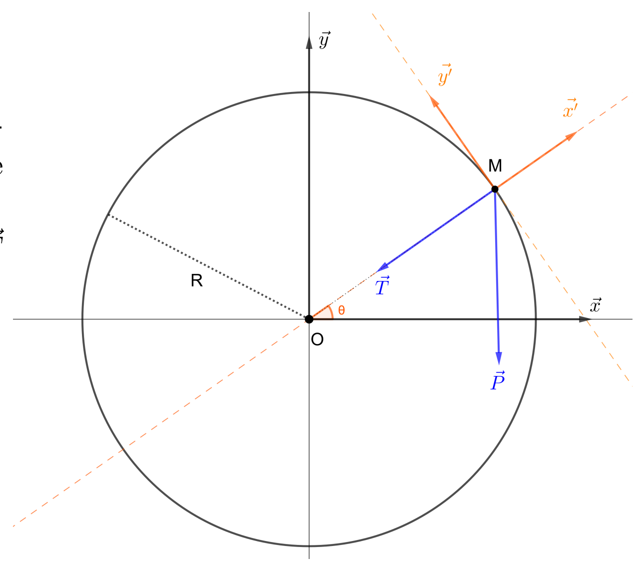
1. $\cos(\theta)$
2. $\sin(\theta)$
3. $\tan(\theta)$
4. $\ln(\theta)$
5. $e^{i\theta}$
6. $\sin(\theta)\cos(\theta)$
7. θ^α
8. $\theta\cos(\theta)\sin(\theta)$

Exercice 7 *Savoir se projeter*

Soit M sur un cercle de rayon R. Soient les vecteurs $\vec{T}$ pointant vers O et $\vec{P}$ parallèle à O_y avec $\|\vec{T}\|=T$ et $\|\vec{P}\|=P$.

a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OM}, \vec{P}$ et $\vec{T}$ en fonction de R, T,P et θ.

b) Donner les composantes de $\vec{P}$ et $\vec{T}$ dans le repère (M, x',y')



Exercice 8 *Repère, distance et vitesse*
On veut étudier le mouvement d'un point P se déplaçant sur une table.

a) Combien de paramètres sont nécessaires pour repérer la position d'un point sur la table ?

b) Comment peut-on décrire le mouvement du point P ?

c) Soient deux points A et C situés sur la trajectoire du point P. Exprimez la distance entre A et B : celle-ci est-elle la distance parcourue par P ?

d) Quelle est la vitessede P entre A et B ? Comment l'appelle-t-on ? Existe-t-il une relation entre cette vitesse et les vitesses de P en A et en B ?

Solutions

Solution 1

1. $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$
2. $\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$
3. (*) $\frac{d}{dt}\tan(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)' = \frac{\cos(t)\cos(t)+\sin(t)\sin(t)}{\cos(t)^2} = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$
4. $\frac{d}{dt}\ln(t) = \frac{1}{t}$
5. $\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}$
6. $\frac{d}{dt}t^{\alpha} = \alpha t^{\alpha-1}$
7. $\frac{d}{dt}\sin(t)\cos(t) = \sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
8. $\frac{d}{dt}t\cos(t) = \cos(t) - t\sin(t)$
9. (**) $\frac{d}{dt}t\cos(t)\sin(t) = \cos(t)\sin(t) - t\sin^2(t) + t\cos^2(t)$

$*(\frac{f}{g})' = (f \cdot \frac{1}{g})' = f \cdot (\frac{1}{g})' + f' \cdot \frac{1}{g} = f(\frac{-g'}{g^2}) + \frac{f'}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

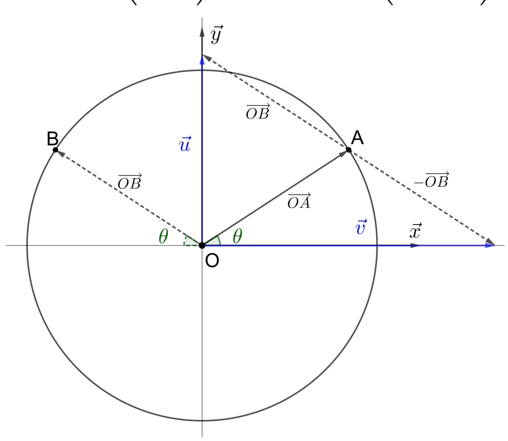
$**(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

Solution 2

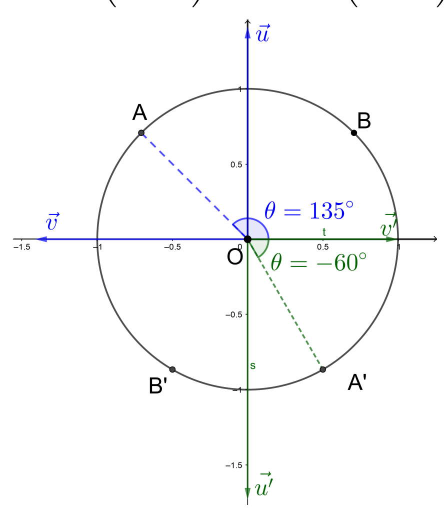
a) $\overrightarrow{OA} = R\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = R\begin{pmatrix}-\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = R\begin{pmatrix}0 \\ 2\sin\theta\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = R\begin{pmatrix}2\cos\theta \\ 0\end{pmatrix}$

b)



d)

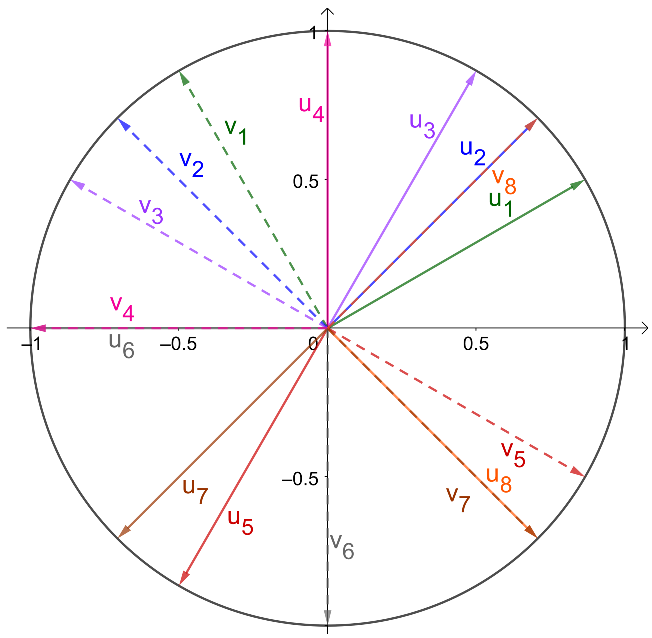


Solution 3

1. $\frac{d}{dt}\cos(\theta) = -\omega \sin\theta$
2. $\frac{d}{dt}\sin(\theta) = \omega\cos\theta$
3. $\frac{d}{dt}\tan(\theta) = \frac{\omega}{\cos^2\theta} = \omega(1+\tan^2\theta)$
4. $\frac{d}{dt}e^{i\theta} = i\omega e^{i\omega t} = i\omega e^{i\theta}$
5. $\frac{d}{dt}\sin(\theta)\cos(\theta) = \omega\cos^2\theta - \omega\sin^2\theta = \omega(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

Solution 4

a)



b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

c) Deux vecteurs sont perpendiculaires si leur produit scalaire vaut zéro :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta = 0$

Solution 5

1. L'analyse dimensionnelle donne, avec les unités suivantes :
   accélèration : $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
   vitesse : $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
   temps : s
   position : m

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ \mathrm{m} &= \underbrace{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot (\mathrm{s})^2}_{m} + \underbrace{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot (\mathrm{s})}_{\mathrm{m}} + \underbrace{\mathrm{m}}_{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

2. ☣ Attention ! Il est important que <u>tous</u> les termes de la somme donnent des mètres.
   (a) $\frac{\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \Rightarrow \mathrm{s}^{-1} \neq \mathrm{m}$ non
   (b) $\frac{\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} \Rightarrow \mathrm{s} \neq \mathrm{m}$ non
   (c) $\frac{\mathrm{m^2{\cdot}s^{-4}}}{\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \Rightarrow \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-3} \neq \mathrm{m}$ non
   (d) $\frac{\mathrm{m^2{\cdot}s^{-2}}}{\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} \Rightarrow \mathrm{m}$ oui !
   C'est donc (d)

Solution 6

1. $\frac{d}{dt}\cos(\theta) = \frac{d\theta(t)}{dt}(-\sin(\theta(t)) = -\dot{\theta}\sin(\theta)$
2. $\frac{d}{dt}\sin(\theta) = \dot{\theta}\cos(\theta)$
3. $\frac{d}{dt}\tan(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)} = \dot{\theta}(1 + \tan^2(\theta))$
4. $\frac{d}{dt}\ln(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\theta}$
5. $\frac{d}{dt}e^{i\theta} = i\dot{\theta}e^{i\theta}$
6. $\frac{d}{dt}\sin(\theta)\cos(\theta) = \dot{\theta}\cos^2(\theta) - \dot{\theta}\sin^2(\theta) = \dot{\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$
7. $\frac{d}{dt}\theta^\alpha = \alpha\dot{\theta}\theta^{\alpha-1}$
8. $\frac{d}{dt}\theta\cos(\theta)\sin(\theta) = \dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) - \theta\dot{\theta}\sin^2(\theta) + \theta\dot{\theta}\cos^2(\theta)$

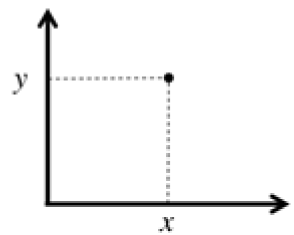
Solution 7

a) $\overrightarrow{OM} = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{P} = P \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{T} = T \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

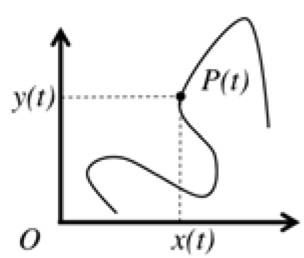
b) $\overrightarrow{P} = P \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{T} = T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution 8

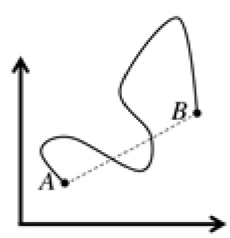
a) Deux paramètres sont nécessaires pour repérer la position d'un point sur une table, par exemple les coordonnées x et y dans un repère orthonormé. On dit que le problème est à deux dimensions : « 2D ». Notez que le terme « dimension » fait ici référence aux dimensions spatiales, notion qui diffère de celle vue dans l'exercice 1.



b) Le mouvement est décrit par la donnée des deux coordonnées en fonction du temps, x(t) et y(t).



c) Dans notre repère 2D, la distance entre A et B est : $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Comme on le voit sur le schéma ci-dessous, cette valeur est plus petite que la distance parcourue par P (c'est la même uniquement si le trajet en ligne droite).



d) la vitesse entre A et B est : $v_{AB} = \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\Delta t}$, où Δt est le temps de trajet de A à B . C'est une vitesse moyenne. Il n'y a pas relation à priori entre cette vitesse moyenne v_{AB} et les vitesses instantanées v_A et v_B. Par exemple, on peut imaginer que P parte à l'arrêt de A et s'arrête en B, avec une vitesse moyenne non nulle…