Corrigé 1 : cinématique et MUA

1. **Dynamique, 1D**

   Equation de Newton pour $t > 0$: $\vec{f} = m\vec{a}\,.$

   (a) Cas $\vec{f} = -f_0\vec{e}_x$

   Selon $\vec{e}_x$: $-f_0 = ma \iff a = -\dfrac{f_0}{m}\,.$

   C'est un MUA. Avec les conditions initiales $v(0) = v_0$ (la vitesse est v_0 à l'instant où le freinage commence) et $x(0) = 0$ (la position nulle à l'instant où le freinage commence),

$$v(t) = \begin{cases} v_0 & \text{si } t < 0 \\ -\dfrac{f_0}{m}t + v_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} v_0 t & \text{si } t < 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_0}{m}t^2 + v_0 t & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$

   Remarque : ce modèle de force de freinage atteint sa limite de validité au plus tard lorsque l'objet s'arrête !

   (b) Cas $\vec{f} = -\lambda\vec{v}\,.$

   Selon $\vec{e}_x$: $-\lambda v = m\dot{v}\,.$

   Avec la condition initiale $v(0) = v_0$, l'évolution de la vitesse est, par intégration,

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}\,.$$

   Avec la condition initiale $x(0) = 0$, l'évolution de la position est, par intégration,

$$x(t) = \frac{mv_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)\,.$$

   Finalement,

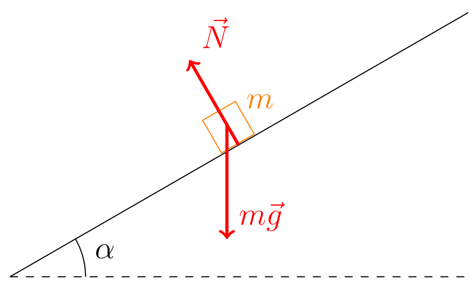
$$v(t) = \begin{cases} v_0 & \text{si } t < 0 \\ v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} v_0 t & \text{si } t < 0 \\ \frac{mv_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$

   Remarque : valeurs limites

$$v(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{mv_0}{\lambda}\,.$$

2. **Projections, MUA**

   Dessin, choix de l'objet et détermination des forces extérieures



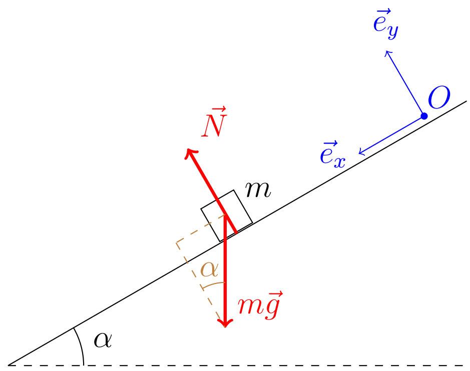
Dans cet exercice, l'objet considéré est la masse m qui se trouve sur un plan incliné dont l'angle sera noté α. La masse est soumise à deux forces extérieures : son poids $m\vec{g}$ et le soutien $\vec{N}$ du plan incliné.

Loi de la dynamique (deuxième loi de Newton)

$$\underbrace{\vec{F}}_{=m\vec{g}+\vec{N}} = m\vec{a}\,,$$

où $\vec{F}$ représente la somme des forces extérieures.

Choix du repère et mise en place des projections



On choisit par exemple un repère dont les axes $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ sont parallèles au plan incliné et l'axe $\vec{e}_y$ perpendiculaire. L'axe $\vec{e}_z$ est perpendiculaire au plan de la feuille : $\otimes\,\vec{e}_z$. Pour simplifier, l'origine O est placée à l'endroit du lâcher.

Projections de la 2ème loi de Newton

La masse est supposée être lâchée. Elle ne possède donc pas de vitesse initiale.

Selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, la masse est immobile, alors qu'elle est uniformément accélérée selon $\vec{e}_x$. En effet,

- Selon $\vec{e}_y$:

$$\underbrace{F_y}_{=-mg\cos\alpha+N} = ma_y = 0\,.$$

  Il n'y a pas de mouvement selon $\vec{e}_y$: $a_y(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad v_y(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad y(t) = 0\ \forall t\,.$

- Selon $\vec{e}_z$:

$$\underbrace{F_z}_{=0} = ma_z \quad\Rightarrow\quad a_z(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad v_z(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad z(t) = 0\ \forall t\,.$$

- Selon $\vec{e}_x$:

$$\underbrace{F_x}_{=mg\sin\alpha} = ma_x \quad\Rightarrow\quad a_x(t) = g\sin\alpha = \text{constante}\ \forall t\,.$$

  L'accélération étant constante (MUA), les équations horaires s'écrivent

$$\begin{aligned} a_x(t) &= g\sin\alpha\,,\\ v_x(t) &= g\sin\alpha\, t\,,\\ x(t) &= \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2\,. \end{aligned}$$

3. **Rencontre de deux objets**

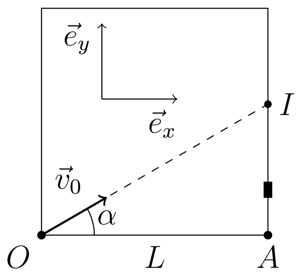
Critère de rencontre

Notons $\vec{r}_b(t)$ et $\vec{r}_p(t)$ les positions respectives de la bille et de la paroi mobile à l'instant t par rapport à l'origine choisie en O. Il y a rencontre entre ces deux objets ssi

$$\exists\, t_r \quad \text{t.q.} \quad \vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r)\,,$$

c'est-à-dire ssi il existe un instant auquel les positions (vectorielles !) coïncident.

Dessin, choix du repère



Le point de rencontre I est donné par $I(L, y_I)$, avec $y_I = L\tan\alpha$.

Equation horaire de la bille

La bille est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_0$ et part de O à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0\, t\,.$$

Equation horaire de la paroi mobile

La paroi mobile est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_p$ et si on suppose qu'elle part de A à l'instant $t = 0$, on peut écrire

$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p\, t + \vec{r}_{p0}$$

avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que les deux équations horaires sont écrites par rapport à la même origine. On se place ici dans le plan de la table (vecteurs à deux dimensions).

Projections de l'équation vectorielle traduisant la rencontre

La bille et la paroi mobile doivent se trouver au même endroit à un instant t_r donné. On cherche donc à déterminer l'existence de t_r tel que

$$\vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_0\, t_r = \vec{v}_p\, t_r + \vec{r}_{p0}\,.$$

Les projections selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ fournissent alors

$$v_0 \cos\alpha\, t_r = L \quad \text{et} \quad v_0 \sin\alpha\, t_r = v_0\, t_r\,.$$

La seconde relation impose que $\sin\alpha = 1$ pour $t_r \neq 0$, ce qui est faux. Un tel temps de rencontre n'existe donc pas.

Réécriture des équations avec un départ retardé de la paroi
Supposons maintenant que la bille part de O à l'instant $t = 0$,

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0 \, t \, ,$$

et que la paroi mobile quitte le coin A à l'instant t_{p0} :

$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p \, (t - t_{p0}) + \vec{r}_{p0}$$

avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$. Appliquer le critère de rencontre revient alors à déterminer t_{p0} tel que t_r existe avec

$$\vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_0 \, t_r = \vec{v}_p \, (t_r - t_{p0}) + \vec{r}_{p0} \, .$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$v_0 \cos\alpha \, t_r = L$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$v_0 \sin\alpha \, t_r = v_0 \, (t_r - t_{p0}) \, .$$

La rencontre doit avoir lieu dans toutes les composantes et les deux relations doivent être vérifiées simultanément. En injectant l'expression de t_r obtenue grâce à la première équation,

$$t_r = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} \, ,$$

dans la seconde, on obtient alors finalement

$$t_{p0} = (1 - \sin\alpha) \, t_r = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} \frac{L}{v_0} \, .$$