Corrigé du Minitest 0

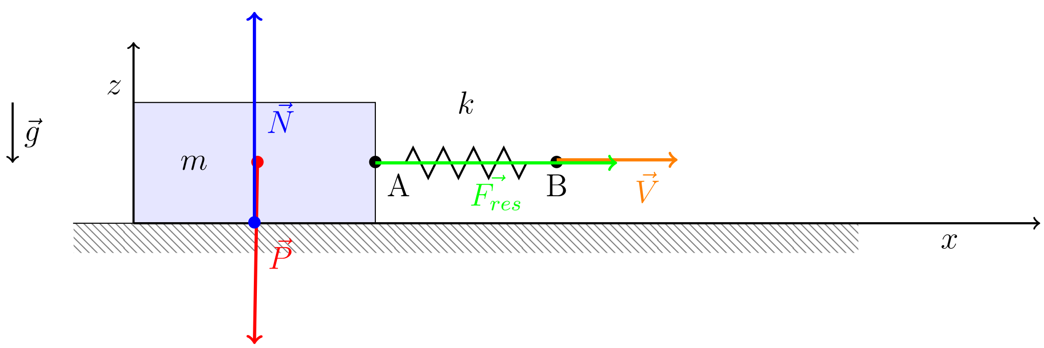
Bloc tiré par un ressort – (15 points)

a) (4 points au total)
On étudie le système constitué du bloc, sur lequel s'exercent les forces suivantes :
— la pesanteur $-mg\hat{e}_z$,
— la force de liaison du support $N\hat{e}_z$,
— la force exercée par le ressort $-k(x_A(t) - x_B(t))\hat{e}_x$

$\boxed{\text{2 points pour la liste, enlever 1 par force manquante ou force additionnelle}}_{\text{A,B}}$

$\boxed{\text{1 point pour l'expression correcte avec les signes}}_{\text{C}}$

$\boxed{\text{1 point pour un dessin complet, avec axes, origine, forces}}_{\text{D}}$



b) (5 points au total)

On applique la 2eme loi de Newton $\boxed{\text{1 point}}_{\text{E}}$:

$$-mg\hat{e}_z + N\hat{e}_z - k(x_A(t) - x_B(t))\hat{e}_x = m\vec{a} \tag{1}$$

En projection dans les deux directions $\hat{x}$ et $\hat{z}$, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -k(x_A(t) - x_B(t)) & = & m\ddot{x}_A(t) \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \\ -mg + N & = & 0 \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{G}} \end{array}\right. \tag{2}$$

Après substitution de $x_B(t) = Vt$ $\boxed{\text{1 point pour la substitution}}_{\text{H}}$, on obtient :

$$\ddot{x}_A(t) = -\frac{k}{m}(x_A(t) - Vt) \ . \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} \tag{3}$$

c) (5 points au total)

On pose $X(t) = x_A(t) - Vt$, l'accélération est inchangée $\ddot{X} = \ddot{x}_A$ $\boxed{\text{1 point pour le changement de variable}}_{\text{J}}$.
L'équation du mouvement devient alors

$$\ddot{X}(t) + \frac{k}{m} X(t) = 0 \,. \tag{4}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega = \sqrt{k/m}$, dont la solution est

$$X(t) = A \sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

avec deux constantes A et ϕ à déterminer avec les conditions initiales données à l'instant $t = 0$ $\boxed{\text{1 point pour la solution générale et } \omega = \sqrt{k/m}}_{\text{K}}$. Ces conditions s'écrivent

$$\begin{cases} x_A(0) &= 0 \\ \dot{x}_A(0) &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(0) &= 0 \\ \dot{X}(0) &= -V \end{cases} \tag{6}$$

$\boxed{\text{1 point pour les equations déterminant les constantes d'intégration}}_{\text{L}}$.
Donc

$$\begin{cases} A \sin(\phi) &= 0 \\ A\omega \cos(\phi) &= -V \end{cases} \tag{7}$$

On résout ensuite

$$\begin{cases} \phi &= n\pi \\ A &= -\frac{V}{\omega \cos \phi} \end{cases} \tag{8}$$

avec n un nombre entier. $\boxed{\text{1 point pour les constantes d'intégration}}_{\text{M}}$ $\boxed{\text{Donner le point aussi si une valeur particulière de n est choisie}}$.
On peut choisir par exemple la solution $n = 0$ et obtenir

$$X(t) = -\frac{V}{\omega} \sin(\omega t). \tag{9}$$

On peut maintenant repasser à la variable x du repère :

$$x_A(t) = Vt - \frac{V}{\omega} \sin(\omega t) \,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{N}} \tag{10}$$

d) (1 points au total)

Le bloc rattrape l'expérimentateur si l'allongement du ressort s'annule. On cherche donc une solution à l'équation

$$x_A(t_2) - x_B(t_2) = -\frac{V}{\omega} \sin(\omega t_2) = 0 \Longrightarrow t_2 = \pi/\omega \,. \qquad \boxed{\text{1 point}}_{\text{P}} \tag{14}$$

La solution $t = 0$ est triviale. Il y a aussi les solutions qui sont des multiples entiers de t_2 mais elles correspondent à des instants ultérieurs à la première collision.