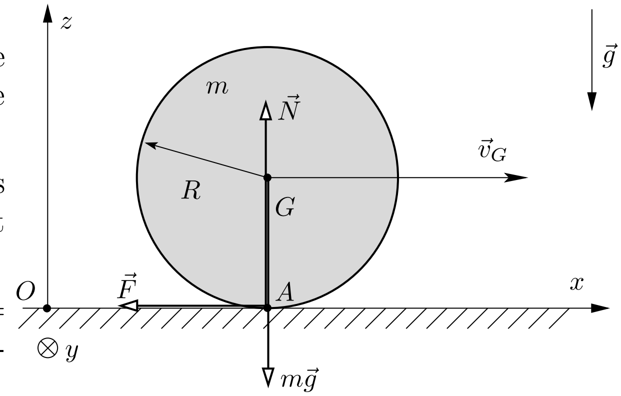
Corrigé du mini-test 5 : Boule de bowling

(1+8+5+3 = 17 points au total)

a) On choisit un repère droit tel que $\hat{x}$ est horizontal, dans la direction et le sens de la vitesse initiale $\vec{v}_G(t_0)$, et $\hat{z}$ vertical, vers le haut.
Les forces s'exerçant sur la boule sont :

- son poids $m\vec{g} = -mg\hat{z}$, vertical vers le bas, et s'appliquant au centre de masse G ;
- la réaction du sol $\vec{N} = N\hat{z}$, verticale vers le haut, s'appliquant au point de contact A de la boule sur le sol ;
- la force de frottement cinétique $\vec{F} = -\mu_c N\hat{x}$, horizontale et opposée à $\vec{v}_G$, s'appliquant au point A.



$\boxed{\text{1 point pour le dessin}}_{\text{A}}$

Enlever 1 point par force manquante ; enlever 1 point pour une force dont la direction ou la norme est irréaliste ; enlever 1 point pour le mauvais point d'application d'une force. Si le compte final est négatif, donner 0 point.

b) Les équations du mouvement de la boule sont données par le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique. Les contraintes du mouvement imposent que l'accélération $\vec{a}_G = \ddot{x}_G\hat{x} + \ddot{y}_G\hat{y} + \ddot{z}_G\hat{z}$ du centre de masse est horizontale, donc que la composante verticale $\ddot{z}_G$ de l'accélération est nulle, et que la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\,\hat{y}$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{B}}$ est parallèle à $\hat{y}$. Le théorème du centre de masse donne

$$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{C}} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_G = -\mu_c N \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{D}} \\ m\ddot{y}_G = 0 \\ m\ddot{z}_G = 0 = -mg + N \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{E}} \end{cases} \tag{1}$$

En éliminant N de ces équations, on trouve

$$m\ddot{x}_G = -\mu_c mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_G = -\mu_c g\,. \tag{2}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué par rapport au centre de masse G s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum_i \vec{M}_{G,i} \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \quad = \underbrace{\overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{GA} \wedge \vec{N}}_{=0} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F} \tag{3}$$

$$= (-R\,\hat{z}) \wedge (-\mu_c mg\,\hat{x}) = R\mu_c mg\,\hat{y}\,. \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{G}} \tag{4}$$

L'axe parallèle à $\hat{y}$ passant par G est un axe principal d'inertie de la boule, donc le moment cinétique par rapport au centre de masse s'exprime comme

$$\vec{L}_G = I_G\,\vec{\omega} = I_G\,\omega\,\hat{y} = \frac{2}{5}mR^2\omega\,\hat{y}\,. \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{H}} \tag{5}$$

Seule la projection sur $\hat{y}$ du théorème du moment cinétique est non triviale :

$$\frac{2}{5}mR^2\dot{\omega} = R\mu_c mg \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} \tag{6}$$

Solution alternative (1) : on peut appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à un point O fixe du sol, par exemple le point de contact de la boule et du sol au temps t_0. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \quad \boxed{\textit{1 point}}_{\text{F}} \quad = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} \tag{7}$$

$$= x_G mg\,\hat{y} - x_G mg\,\hat{y} + 0 = 0\,. \quad \boxed{\textit{1 point}}_{\text{G}} \tag{8}$$

Le moment cinétique par rapport au point O est obtenu à l'aide du théorème du transfert

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}_G + I_G\vec{\omega} = (mR\dot{x}_G + I_G\omega)\,\hat{y}\,. \quad \boxed{\textit{1 point}}_{\text{H}} \tag{9}$$

La projection sur $\hat{y}$ du théorème du moment cinétique donne

$$mR\ddot{x}_G + I_G\dot{\omega} = mR\ddot{x}_G + \frac{2}{5}mR^2\dot{\omega} = 0\,. \quad \boxed{\textit{1 point}}_{\text{I}} \tag{10}$$

Solution alternative (2) : on peut également prendre le point de contact A comme référence, mais ce point a une vitesse non nulle car le mouvement est avec glissement entre t_0 et t_1. Il faut donc appliquer le théorème du moment cinétique de la façon suivante :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A - \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G\,. \quad \boxed{\textit{1 point (enlever } 0.5 \textit{ point si le terme de droite est incomplet)}}_{\text{F}} \tag{11}$$

Comme la vitesse du point A est parallèle à $\vec{v}_G$, le dernier terme est nul. Tous les moments des forces par rapport à A sont nuls. $\boxed{\textit{1 point}}_{\text{G}}$ *De plus, l'expression pour le moment cinétique est identique à l'expression obtenue précédemment ($\vec{L}_A = \vec{L}_O$, Eq. (9)).* $\boxed{\textit{1 point}}_{\text{H}}$ *On trouve alors la même équation que l'équation (10), ci-dessus.* $\boxed{\textit{1 point}}_{\text{I}}$

c) En intégrant l'équation (2), on trouve, en tenant compte des conditions initiales,

$$\dot{x}_G(t) = -\mu_c gt + v_0\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{J}} \tag{12}$$

et de l'équation (6), en tenant compte de la vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0$, on obtient

$$\omega(t) = \frac{mR}{I_G}\mu_c gt = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}t\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{K}} \tag{13}$$

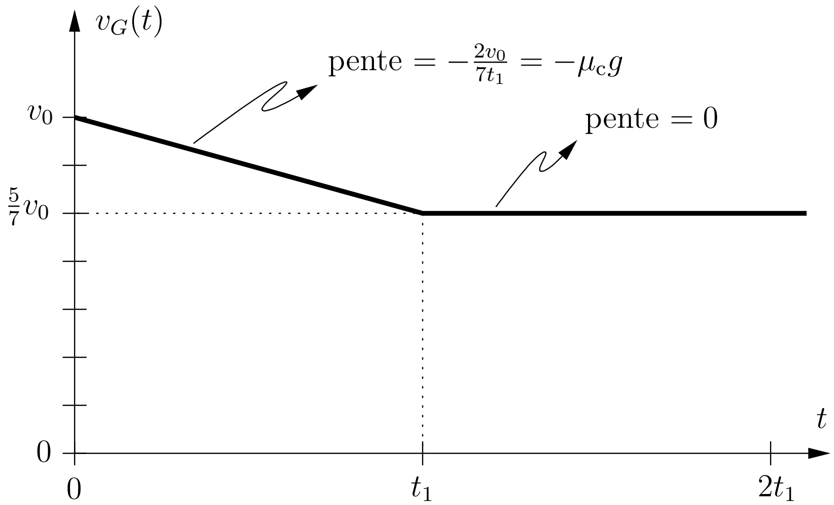
La condition de roulement sans glissement est que la vitesse du point de contact avec le sol soit nulle, $\vec{v}_A = \vec{0}$. $\boxed{\text{1 point}}_{\text{L}}$ Cette condition permet de relier la vitesse du centre de masse $\vec{v}_G$ à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG} = \vec{0} + \omega R\hat{y} \wedge \hat{z} = \omega R\hat{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_G = \omega R\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{M}} \tag{14}$$

Le temps t_1 correspond alors à l'instant auquel la condition $\dot{x}_G(t_1) = \omega(t_1)R$ est vérifiée. En utilisant les équations (12) et (13), on trouve

$$-\mu_c gt_1 + v_0 = \frac{mR}{I_G}\mu_c gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{I_G}{I_G + mR^2}\frac{v_0}{\mu_c g} = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_c g}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{N}} \tag{15}$$

d) Entre les temps $t_0 = 0$ et t_1, la vitesse du centre de masse v_G décroit linéairement à partir de v_0, comme indiqué par l'équation (12). Au temps t_1, au moment où la roue cesse de glisser, la force de frottement cinétique s'annule, et une force de frottement statique pourrait entrer en jeu pour contrer la composante horizontale d'une force extérieure au système. A partir du temps t_1, les seules forces extérieures qui s'appliquent sur la boule sont le poids et la réaction du sol, toutes deux verticales. La force de frottement statique est donc nulle. Par le théorème du centre de masse, l'accélération du centre de masse est nulle également, donc v_G reste constante pour $t \geq t_1$. 1 point pour la justification O



2 points pour le graphique P,Q

1 point pour v_G = constante après t_1 et 1 point pour le reste (pente négative avant t_1 et graphique à l'échelle)