À rendre le jeudi 10 décembre 2020 *tigrane.cantatmoltrecht@epfl.ch*

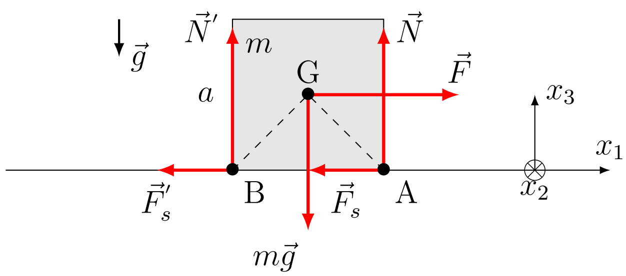
Corrigé du mini-test 6 : Rouler un cube

(7+6+7 = 20 points au total)

a) **Conditions de décollement et de non glissement (7 pts)**

Les forces s'appliquant sur le cube sont :

- La force exercée au centre de masse : $\vec{F} = F\ \hat{x}_1$
- Le poids : $m\vec{g} = -mg\ \hat{x}_3$
- La force de frottement exercée au point d'appuis A : $\vec{F}_s = -F_s\ \hat{x}_1$
- La force de frottement exercée au point d'appuis B : $\vec{F}'_s = -F'_s\ \hat{x}_1$
- La force de soutient en A : $\vec{N} = N\ \hat{x}_3$
- La force de soutient en B : $\vec{N}' = N'\ \hat{x}_3$



$\boxed{\text{2 points pour 6 forces correctement placées et orientées, } \vec{F}_S \text{ et de } \vec{F}'_S \text{ doivent être horizontales}}_{\text{A,B}}$

$\boxed{\text{Enlever un point par force manquante ou point d'application faux.}}$

La condition d'équilibre statique est : somme des forces externes nulle et somme des moments nulles $\boxed{\text{1 point .}}_{\text{C}}$

En choisissant A pour point de calcul des moments :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}' + \vec{F}_s + \vec{F}'_s = \vec{0} \\ \sum_i \vec{M}_{A,i}^{\text{ext}} = \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{F} + m\vec{g}\right) + \overrightarrow{AB} \wedge \left(\vec{N}' + \vec{F}'_S\right) = \vec{0} \end{cases} \tag{1}$$

La projection sur les axes du repère donne le système suivant $\boxed{\text{1 point}}_{\text{D}}$:

$$\begin{cases} F - F_s - F'_s = 0 \\ -mg + N + N' = 0 \\ \frac{a}{2}mg - \frac{a}{2}F - aN' = 0 \end{cases} \tag{2}$$

En choisissant G pour le calcul des moments :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}' + \vec{F}_s + \vec{F}'_s = \vec{0} \\ \sum_i \vec{M}_{G,i}^{\text{ext}} = \overrightarrow{GA} \wedge \left(\vec{N} + \vec{F}_S\right) + \overrightarrow{GB} \wedge \left(\vec{N}' + \vec{F}'_S\right) = \vec{0} \end{cases} \tag{3}$$

La projection sur les axes du repère donne le système suivant $\boxed{\text{1 point}}_{\text{D}}$:

$$\begin{cases} F - F_s - F_s' = 0 \\ -mg + N + N' = 0 \\ \frac{a}{2}(F_S + F_S' - N + N') = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Le décollement a lieu lorsque $N' = 0$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{E}}$, ce qui implique que la force de frottement F_s' s'annule. En effet, par la loi de Coulomb, on sait que la force de frottement dépend de la force normale donc

$$N' = 0 \quad \Rightarrow \quad F_s' = 0 \tag{5}$$

Le système d'équation devient :

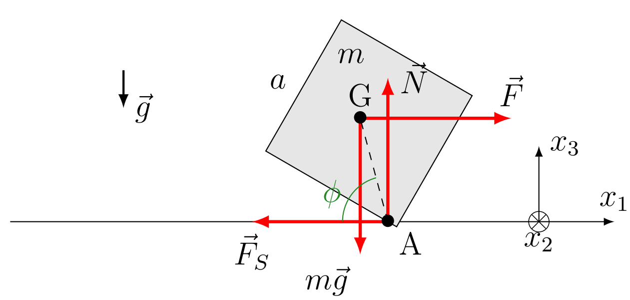
$$\begin{cases} F = F_s \\ mg = N \\ mg = F \end{cases} \tag{6}$$

Donc $F = mg$ est la condition recherchée $\boxed{\text{1 point}}_{\text{F}}$: lorsque la norme de la force $\vec{F}$ est égale au poids mg le cube ne repose plus que sur la point d'appuis A. Dans cette situation, la force de frottement en A est égale et opposée à la force F. La condition de non glissement de A peut s'écrire alors par la loi de Coulomb :

$$\mu_s \geq \frac{F_s}{N} = \frac{F}{mg} = 1 \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{G}} \tag{7}$$

b) **Équations du mouvement (6 pts)**

Dans la situation dynamique, la disposition des forces correspond au schéma ci-dessous



Calcul en utilisant le point G (6pts)

Les équations du mouvement sont données par *théorème du centre de masse* et le *théorème du moment cinétique*, ici le point G :

$$\begin{cases} m\vec{a}_G = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \\ \dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum_i \vec{M}_{G,i}^{\text{ext}} \end{cases} \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{H}} \tag{8}$$

Ce qui pour la situation présente s'écrit :

$$\begin{cases} m\vec{a}_G = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_s \\ \dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \tilde{I}_G\dot{\vec{\omega}} = \overrightarrow{GA} \wedge \left(\vec{F}_s + \vec{N}\right) \end{cases} \tag{9}$$

Il s'agit d'un mouvement plan sur plan parce que le plan de section du cube reste parallèle au plan x_1x_3 du référentiel, donc

$$\vec{\omega} = \omega\hat{x}_2 \tag{10}$$

Le sens de $\vec{\omega}$ est donné par la règle du tire bouchon, et sa norme par la vitesse angulaire donc

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{x}_2\,. \ \boxed{\text{1 point 0.5 si signe incorrect}}_{\text{I}} \tag{11}$$

Le calcul du moment des forces F_s et N par rapport à G donne

$$\begin{aligned}
\vec{M}_G &= \overrightarrow{GA} \wedge \left(\vec{F}_s + \vec{N}\right) \\
&= GA\left(\cos\phi\ \hat{x}_1 - \sin\phi\ \hat{x}_3\right) \wedge \left(-F_s\ \hat{x}_1 + N\ \hat{x}_3\right) \\
&= GA\ (N\ \ \cos\phi\ \underbrace{\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_3}_{=-\hat{x}_2} + F_s\ \ \sin\phi\ \underbrace{\hat{x}_3 \wedge \hat{x}_1}_{=\hat{x}_2}) \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(-N\cos\phi + F_s\sin\phi\right)\ \hat{x}_2\ \boxed{\text{1 point}}_{\text{J}}
\end{aligned}$$

Comme la droite Δ_g passant par G et parallèle à $\hat{x}_2$ est un axe principal d'inertie du cube, on peut écrire :

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G\vec{\omega} = I_{G,22}\omega\hat{x}_2 = I_{\Delta G}\dot{\phi}\ \hat{x}_2 = \frac{ma^2}{6}\ \dot{\phi}\ \hat{x}_2\ \boxed{\text{1 point}}_{\text{K}} \tag{12}$$

La projection des équations sur les axes du repère donne les équations du mouvement :

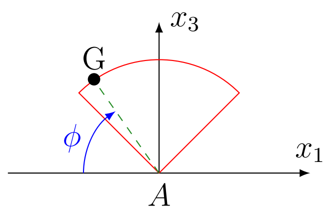
$$\begin{cases}
m\ddot{x}_{G1} = F - F_s \\
m\ddot{x}_{G2} = 0 \\
m\ddot{x}_{G3} = N - mg \\
\frac{ma^2}{6}\ddot{\phi} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(-N\cos\phi + F_s\sin\phi\right)
\end{cases} \tag{13}$$

La relation entre les variable cartésiennes x_1, x_3 et la variable angulaire ϕ est

$$\begin{cases}
x_{G1} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\phi \\
x_{G3} = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\phi
\end{cases} \tag{14}$$

donc, pour les dérivées seconde, on a :

$$\begin{cases}
\ddot{x}_{G1} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\dot{\phi}^2\ \cos\phi + \ddot{\phi}\ \sin\phi\right) \\
\ddot{x}_{G3} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\dot{\phi}^2\ \sin\phi + \ddot{\phi}\ \cos\phi\right)
\end{cases} \tag{15}$$



On peut maintenant remplacer ces coordonnées dans l'équation 13 pour obtenir un système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} \ddot{x}_{G2} = 0 \\ F_s = F - m\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\dot{\phi}^2 \ \cos\phi + \ddot{\phi} \ \sin\phi\right) \\ N = mg + m\frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\dot{\phi}^2 \ \sin\phi + \ddot{\phi} \ \cos\phi\right) \\ \ddot{\phi} = \frac{6}{\sqrt{2}am}\left(-N\cos\phi + F_s\sin\phi\right) \end{cases} \tag{16}$$

On peut calculer :

$$N\cos\phi = mg\cos\phi + m\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\phi\left(-\dot{\phi}^2 \ \sin\phi + \ddot{\phi} \ \cos\phi\right) \tag{17}$$

$$F_s\sin\phi = F\sin\phi - m\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\phi\left(\dot{\phi}^2 \ \cos\phi + \ddot{\phi} \ \sin\phi\right) \tag{18}$$

$\boxed{\text{1 point pour la substitution de } N \text{ et } F_s}$ L

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}am}{6}\ddot{\phi} &= -N\cos\phi + F_s\sin\phi \\ &= -mg\cos\phi + F\sin\phi + \cancel{\frac{ma}{\sqrt{2}}\cos\phi\sin\phi} - \cancel{\frac{ma}{\sqrt{2}}\cos\phi\sin\phi} \\ &\quad -\frac{ma}{\sqrt{2}}\cos^2\phi\,\ddot{\phi} - \frac{ma}{\sqrt{2}}\sin^2\phi\,\ddot{\phi} \end{aligned}$$

Finalement, l'équation différentielle gouvernant l'angle de rotation est :

$$\ddot{\phi} = \frac{3}{2\sqrt{2}am}\left(F\sin\phi - mg\cos\phi\right) \ \boxed{\text{1 point}}\ \mathrm{M} \tag{19}$$

Calcul en utilisant le point A (6pts)

Les équations du mouvement sont données par *théorème du centre de masse* et le *théorème du moment cinétique*, ici le point A :

$$\begin{cases} m\vec{a}_G = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \\ \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i \vec{M}_{A,i}^{\text{ext}} \end{cases} \quad \boxed{\text{1 point}}\ \mathrm{H} \tag{20}$$

Ce qui pour la situation présente s'écrit :

$$\begin{cases} m\vec{a}_G = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_s \\ \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \tilde{I}_A\dot{\vec{\omega}} = \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{F} + m\vec{g}\right) \end{cases} \tag{21}$$

Il s'agit d'un mouvement plan sur plan parce que le plan de section du cube reste parallèle au plan x_1x_3 du référentiel, donc

$$\vec{\omega} = \omega\hat{x}_2 \tag{22}$$

Le sens de $\vec{\omega}$ est donné par la règle du tire bouchon, et sa norme par la vitesse angulaire donc

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{x}_2\,. \ \boxed{\text{1 point 0.5 si signe incorrect}}\ \mathrm{I} \tag{23}$$

Le moment des forces extérieures par rapport au point A est :

$$\begin{aligned}
\vec{M}_A &= \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{F} + m\vec{g}\right) && (24)\\
&= AG\,(\sin\phi\ \hat{x}_3 - \cos\phi\ \hat{x}_1) \wedge (F\ \hat{x}_1 - mg\ \hat{x}_3) && (25)\\
&= AG\ F\sin\phi\ \underbrace{\hat{x}_3 \wedge \hat{x}_1}_{\hat{x}_2} + AG\ mg\cos\phi\ \underbrace{\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_3}_{-\hat{x}_2} && (26)\\
&= \frac{a}{\sqrt{2}}\,(F\sin\phi - mg\cos\phi)\,\hat{x}_2\ \boxed{\text{1 point}}_{\text{J}} && (27)
\end{aligned}$$

Le **moment cinétique** du cube par rapport à A est

$$\vec{L}_A = \tilde{I}_A\vec{\omega}\boxed{\text{1 point}}_{\text{K}} \qquad (28)$$

L'axe Δ_G, parallèle à $\hat{x}_1$ et passant par G est un axe de symétrie du cube, c'est donc un axe principal d'inertie. En vertu du théorème de Huygens-Steiner le moment d'inertie du cube par rapport à un axe Δ_A passant par A et parallèle à Δ_G est

$$I_{\Delta_A} = I_{\Delta_G} + mAG^2 = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{2} = \frac{2}{3}ma^2\ \boxed{\text{1 point pour Steiner}}_{\text{L}} \qquad (29)$$

L'axe Δ_A est aussi un axe principal d'inertie (théorème vu au cours) donc

$$\vec{L}_A = \frac{2}{3}ma^2\vec{\omega} \qquad (30)$$

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{G1} = F - F_s \\ m\ddot{x}_{G2} = 0 \\ m\ddot{x}_{G3} = N - mg \\ \frac{2}{3}ma^2\ \ddot{\phi} = \frac{a}{\sqrt{2}}\,(F\sin\phi - mg\cos\phi) \end{cases} \qquad (31)$$

L'équation différentielle pour ϕ est donc :

$$\ddot{\phi} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\ \frac{1}{ma}\,(Fsin\phi - mg\cos\phi)\ \boxed{\text{1 point}}_{\text{M}} \qquad (32)$$

c) **Analyse de l'énergie du système et du travail des forces (7 pts)**

Commençons par déterminer les forces qui travaillent :

(a) Le point d'application de la force de réaction $\vec{N}$ ne se déplace pas, donc cette force ne travaille pas : $\delta W_N = 0$,

(b) Le point d'application de la force de frottement statique $\vec{F}_f$ ne se déplace pas, donc cette force ne travaille pas : $\delta W_{F_f} = 0$,

(c) La pesanteur est conservative. Elle dérive du potentiel $V_g(\vec{x}) = mgx_3$, telle que $m\vec{g} = -\nabla V_g$

(d) La force $\vec{F}$ est conservative : elle dérive du potentiel $V_F(\vec{x}) = -Fx_1$, en effet $\vec{F} = -\nabla V_F$ $\boxed{\text{1 point pour une justification}}_{\text{N}}$

Les deux forces qui travaillent étant des forces conservative on peut affirmer, comme vu au cours, que l'énergie mécanique est conservée. $\boxed{\text{1 point -0.5 par élément manquant}}_{\mathrm{O}}$
On peut donc écrire l'énergie potentiel du système :

$$E_{pot} = V_g + V_f = mgx_3 - Fx_1 \ \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{P}} \tag{33}$$

La relation entre les variables cartésiennes x_1, x_3 et la variable angulaire ϕ est définies par l'équation (14). En effectuant le remplacement dans E_{pot} on obtient

$$E_{pot} = mgx_3 - Fx_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(mg\sin\phi + F\cos\phi) \tag{34}$$

On dérive une première fois pour trouver les extrema de la fonction :

$$\frac{dE}{d\phi} = \frac{a}{\sqrt{2}}(mg\cos\phi - F\sin\phi) \ \boxed{\text{1 point ou pour l'équilibre des forces}}_{\mathrm{Q}} \tag{35}$$

Cette fonction s'annule pour $mg\cos\phi = F\sin\phi$, donc lorsque $\frac{mg}{F} = \tan\phi$. La condition sur F pour qu'il y ait un point d'équilibre à l'angle ϕ_1 est que

$$F = mg\cot\phi \ \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{R}} \tag{36}$$

Si $\phi_1 \in [\frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{2}]$ alors $\cot\phi \in [0, 1]$
Pour déterminer la nature de la stabilité, on dérive le potentiel une deuxième fois

$$\frac{d^2E}{d\phi^2} = -\frac{a}{\sqrt{2}}(mg\sin\phi + F\cos\phi) \ \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{S}} \tag{37}$$

Dans l'intervalle $[\frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{2}]$ les fonctions $\sin\phi$ et $\cos\phi$ sont positives, donc $\frac{d^2E}{d\phi^2} \leq 0$ dans cet intervalle, ce qui implique que l'équilibre est instable. $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{T}}$