Cours Euler: Corrigé 1

le 24 août 2022

Exercice 1

On écrit le nombre $n = 10'000 \cdot a + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot d + e$. On doit montrer un “si et seulement si”, il y a donc deux parties. Dans les deux parties on utilise l’astuce de compliquer l’écriture de ce nombre

$$n = (9999 \cdot a + a) + (999 \cdot b + b) + (99 \cdot c + c) + (9 \cdot d + d) + e$$

Or, par associativité et commutativité de l’addition on peut enlever les parenthèses et regrouper les termes de sorte que

$$n = 9999 \cdot a + 999 \cdot b + 99 \cdot c + 9 \cdot d + (a + b + c + d + e)$$

Comme $9999 = 9 \cdot 1111$, que $999 = 9 \cdot 111$ et que $99 = 9 \cdot 11$, on utilise ensuite la distributivité pour obtenir

$$n = 9 \cdot (1111 \cdot a + 111 \cdot b + 11 \cdot c + 1 \cdot d) + (a + b + c + d + e)$$

On appelle encore $m = 1111 \cdot a + 111 \cdot b + 11 \cdot c + 1 \cdot d$. Alors $\boxed{n = 9 \cdot m + (a + b + c + d + e)}$.

(1) Supposons que n est divisible par 9. On doit montrer que la somme $a + b + c + d + e$ est aussi divisible par 9.
Comme n est divisible par 9, par définition, il existe un entier naturel k tel que $n = 9 \cdot k$. En soustrayant de part et d’autre $9 \cdot m$ dans la formule encadrée on obtient alors

$$a + b + c + d + e = 9 \cdot k - 9 \cdot m = 9 \cdot (k - m)$$

On a bien montré que $a + b + c + d + e$ est un multiple de 9, autrement dit cette somme est divisible par 9.

(2) Supposons maintenant que $a + b + c + d + e$ est divisible par 9. On doit montrer que n est aussi divisible par 9.
Par hypothèse $a + b + c + d + e$ est divisible par 9, ce qui veut dire par définition qu’il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $a + b + c + d + e = 9 \cdot \ell$. On remplace cette expression dans la formule encadrée ci-dessus et on obtient par distributivité

$$n = 9 \cdot m + 9 \cdot \ell = 9 \cdot (m + \ell)$$

On a prouvé que n est un multiple de 9, ce qui conclut la démonstration.

Exercice 2

Il y a deux cas. Supposons d’abord que n est un nombre qui se termine par zéro. Alors les conventions d’écriture des nombres en base 10 signifient que n est un multiple de 10, autrement dit il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 10 \cdot k$. A fortiori n est un multiple de 5 puisque $n = 5 \cdot (2 \cdot k)$.
Supposons maintenant que n se termine par 5. On écrit alors $n = m + 5$ où $m = n - 5$ est donc un nombre qui se termine par zéro. On conclut du premier cas ci-dessus que m est divisible par 5. Ainsi n est une somme de deux multiples de 5, c’est encore un multiple de 5.

Exercice 3

Un nombre à trois chiffres $n = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ peut s'écrire, un peu comme dans l'exercice 1, comme

$$n = (99 \cdot a + a) + (11 \cdot b - b) + c = 99 \cdot a + 11 \cdot b + (a - b + c) = 11 \cdot (9 \cdot a + b) + (a - b + c)$$

Appelons $m = 9 \cdot a + b$ pour obtenir lécriture plus compacte $\boxed{n = 11 \cdot m + (a - b + c)}$.
(1) Supposons que n divisible par 11. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 11 \cdot k$. On obtient en soustrayant $11 \cdot m$ de part et d'autre de l'égalité ci-dessus que

$$a - b + c = 11 \cdot k - 11 \cdot m = 11 \cdot (k - m)$$

Ainsi $a - b + c$ est un multiple de 11. Or a et c sont des chiffres compris entre 0 et 9, leur somme vaut donc au maximum 18. Le nombre $a - b + c$ est donc un multiple de 11 compris entre zéro et 18, il ne peut que s'agir de 0 ou 11.

(2) Supposons maintenant que $a - b + c$ vaut zéro ou 11. La formule encadrée donne alors $n = 11 \cdot m$ ou $n = 11 \cdot m + 11$. Dans les deux cas n est un multiple de 11 car une somme de deux multiples de 11 est encore un multiple de 11 par distributivité.

Exercice 4

On s'intéresse à l'expression $A \cup (B \cap C)$. Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble X.
(a) et (b) Les diagrammes de Venn sont corrigés sur les séries.
(c) Soit x un élément de $A \cup (B \cap C)$. On doit montrer que c'est un élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Par définition de l'union, il y a deux cas. Soit $x \in A$, soit $x \in B \cap C$.
Premier cas : $x \in A$. Alors on a que $x \in A \cup B$ et aussi $x \in A \cup C$. Par définition de l'intersection cela signifie que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Deuxième cas : $x \in B \cap C$. On sait ici que x est un élément de B et aussi un élément de C. Comme $x \in B$, on conclut que $x \in A \cup B$ et comme $x \in C$, on conclut que $x \in A \cup C$. On a prouvé que x est un élément de $A \cup B$ et de $A \cup C$, il est donc dans l'intersection $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Dans les deux cas, on est arrivé à montrer que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(d) Soit y un élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. On doit montrer que y est un élément de $A \cup (B \cap C)$. Par hypothèse on a $y \in A \cup B$ et $y \in A \cup C$. De la première information on tire que $y \in A$ ou $y \in B$ et de la deuxième que $y \in A$ ou $y \in C$. Il y a ici quatre cas. Soit $y \in A$ et $y \in A$, soit $y \in A$ et $y \in C$, soit $y \in B$ et $y \in A$, soit enfin $y \in B$ et $y \in C$.
Dans les trois premiers cas on voit que $y \in A$ et on conclut que forcément $y \in A \cup (B \cap C)$. Dans le dernier cas, on a que $y \in B \cap C$ puisqu'il appartient aux deux sous-ensembles. Ici aussi il appartient nécessairement à l'ensemble plus grand $A \cup (B \cap C)$. Ce qui conclut la démonstration.

(e) En résumé la partie (c) montre que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et la partie (d) montre l'autre inclusion $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Par le principe de la double inclusion on conclut que $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

(f) Cette égalité n'admet pas d'analogue dans $\mathbb{N}$ (en remplaçant $\cup$ par $+$ et $\cap$ par $\cdot$) car

$$(a + b) \cdot (a + c) = a^2 + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$$

qui n'est pas égal à $a + b \cdot c$ en général. La formule est fausse en particulier pour $a = b = c = 1$ puisque $1 + 1 \neq 2 \cdot 2$.

Exercice 5

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}$. On veut démontrer que $m \cdot (n : k) = (m \cdot n) : k$ quand cela a un sens.

(a) Ces expressions ont un sens si k divise n. En effet dans ce cas le quotient $n : k$ existe et le membre de gauche de l'égalité existe. De plus si k divise n, alors k divise aussi $m\dot{n}$, si bien que le membre de droite aussi existe.

(b) Lorsque k divise n, on démontre que $m \cdot (n : k) = (m \cdot n) : k$.
L'expression de droite $(m \cdot n) : k$

Exercice 6

Soit X l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$.

(a) La liste de tous les sous-ensembles de X constitués de deux éléments est la suivante (on commence systématiquement pour ne rien oublier, par exemple avec tous les sous-ensembles qui contiennent A) :

$$\{A; B\}, \{A; C\}, \{A; D\}, \{A; E\}, \{B; C\}, \{B; D\}, \{B; E\}, \{C; D\}, \{C; E\}, \{D; E\}$$

Il y a donc 10 tels sous-ensembles, ce qu'on aurait pu calculer en se disant qu'il faut choisir d'abord un élément parmi les cinq de X, il y a 5 choix possibles, puis encore un parmi les autre restants. Ceci fait $5 \cdot 4 = 20$ possibilités. Or, nous avons compté chaque sous-ensemble deux fois parce que $\{x, y\} = \{y, x\}$ pour tous $x, y \in X$. Cela fait donc bien 10 et notre liste est complète.

(b) Pour choisir trois éléments dans un ensemble X qui en contient 5, on peut tout aussi bien choisir les deux éléments qui *ne font pas* partie du sous-ensemble. Il y a donc exactement le même nombre de sous-ensembles de X constitués de trois éléments.

(c) Il y a 5 sous-ensembles constitués d'un élément et donc 5 aussi de quatre éléments, par le même argument que ci-dessus.

(d) Dans les parties précédentes on a compté $10 + 10 + 5 + 5 = 30$ sous-ensembles de X. Les seuls sous-ensembles que nous n'avons pas encore considérés sont l'ensemble vide et X. Cela fait donc 32. L'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$ est précisément l'ensemble de tous les sous-ensembles de X. Il Et contient donc 32 éléments.

Exercice 7

Calcule dans chacun des cas le pgdc et le ppmc des nombres suivants en utilisant la méthode de factorisation :

(a) $135 = 3^3 \cdot 5$ et $324 = 2^2 \cdot 3^4$. Ainsi le pgdc est $3^3 = 27$ et le ppmc est $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 = 1620$.

(b) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ et $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Ainsi le pgdc vaut $2^2 = 4$ et le ppmc est $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

(c) $1'000'000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$ et $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Ainsi le pgdc est $2^4 \cdot 5 = 80$ et le ppmc est $2^6 \cdot 3 \cdot 5^6 = 3'000'000$.

(d) $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ et $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, donc le pgdc est $3^2 \cdot 5 = 45$ et le ppmc $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 1890$.

Exercice 8

Dans un restaurant, on a deux réservations de groupes pour la soirée : un groupe de 24 personnes et un groupe de 84 personnes. On souhaite les répartir à des tables où pourront s'asseoir le plus de personnes possible ensemble, d'un seul groupe. On veut qu'il y ait le même nombre de personnes à chaque table.

On observe d'abord qu'il s'agit de probème (simple) concernant le pgdc puisqu'il faut trouver le plus grand nombre possible dont 24 et 84 sont des multiples. Ainsi le nombre cherché est 12. En effet $2 \cdot 12 = 24$ et $7 \cdot 12 = 84$.

Exercice 9

Soit a et b deux nombres entiers naturels. On appelle d le pgdc et m le ppmc. Démontre que $a \cdot b = d \cdot m$.
Comme $d =$pgdc(a, b), alors $d \mid a$ et $d \mid b$. Par conséquent, il existe a_1 et b_1 tels que $a = d \cdot a_1$ et $b = d \cdot b_1$.
De plus, comme d est le plus grand diviseur commun de a et b, si on décompose a_1 et b_1 en produits de facteurs premiers, alors a_1 et b_1 n'ont aucun facteurs premiers communs, de sorte que :

$\text{pgdc}(a_1, b_1) = 1$ et $\text{ppmc}(a_1, b_1) = a_1 \cdot b_1$.

De plus, $a = d \cdot a_1$ et $b = d \cdot b_1$ donc $\text{ppmc}(a, b) = d \cdot \text{ppmc}(a_1, b_1)$. Et ainsi :

$$
\begin{aligned}
\text{pgdc}(a,b) \cdot \text{ppmc}(a,b) &= d \cdot \text{ppmc}(a,b) \\
&= d \cdot d \cdot \text{ppmc}(a_1, b_1) \\
&= d^2 \cdot (a_1 \cdot b_1) \\
&= d \cdot (d \cdot a_1) \cdot b_1 && \text{(associativité)} \\
&= (d \cdot a) \cdot b_1 \\
&= b_1 \cdot (d \cdot a) && \text{(commutativité)} \\
&= (b_1 \cdot d) \cdot a && \text{(associativité)} \\
&= (d \cdot b_1) \cdot a && \text{(commutativité)} \\
&= b \cdot a \\
&= a \cdot b && \text{(commutativité)}
\end{aligned}
$$