

Cours Euler: Corrigé 4

le 14 septembre 2022

Exercice 1

1. Montrons que la relation \sim entre fractions est réflexive et symétrique :

(i) Pour toute fraction $\frac{a}{b}$, les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a}{b}$ sont équivalentes car par la commutativité de la multiplication dans \mathbb{Z} :

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(ii) Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions équivalentes, c'est-à-dire $a \cdot d = b \cdot c$. Alors

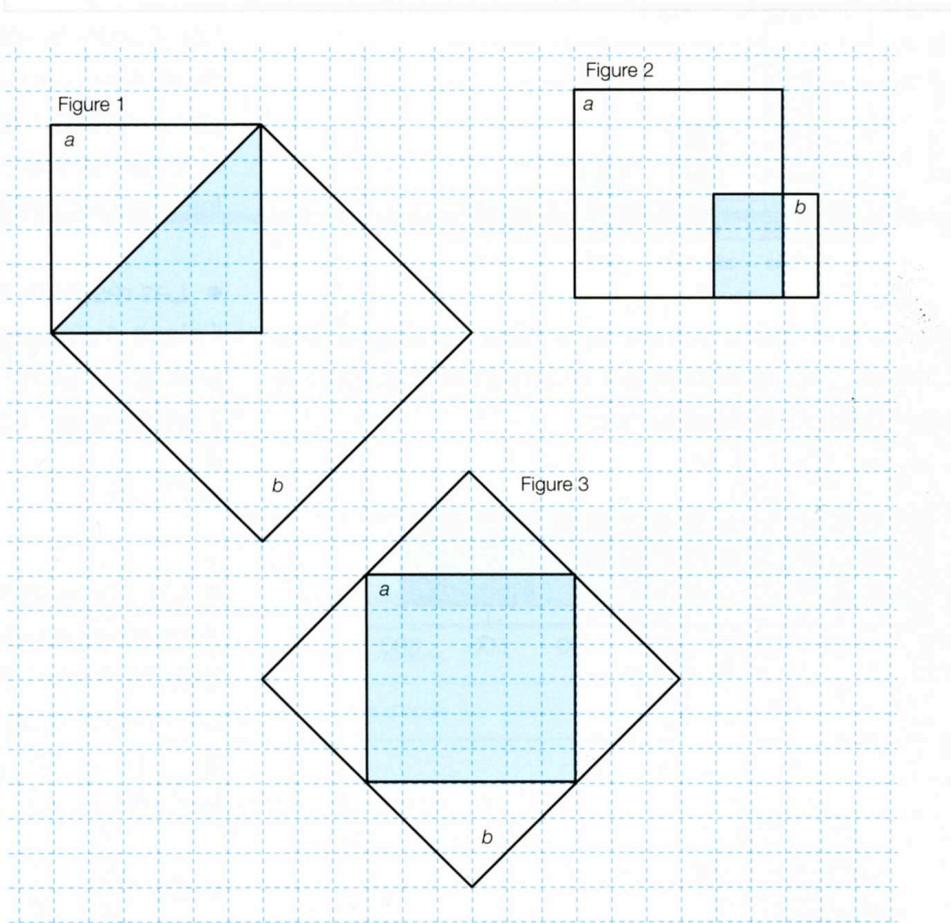
$$c \cdot b = b \cdot c = a \cdot d = d \cdot a,$$

ce qui montre que $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$.

2) Supposons que $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, c'est-à-dire que $a \cdot d = b \cdot c$. Montrons qu'on peut passer de $\frac{a}{b}$ à $\frac{c}{d}$ par l'amplification par d suivie par la simplification par b :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{(b \cdot c) : b}{(b \cdot d) : b} = \frac{c}{d}$$

Exercice 2



189.

l'aire de a vaut $1 \cdot a$, l'aire de b vaut $2 \cdot a$, l'aire de c vaut $\frac{3}{2} \cdot a$, l'aire de d vaut $\frac{3}{4} \cdot a$,
 l'aire de e vaut $\frac{3}{2} \cdot a$, l'aire de f vaut $\frac{1}{2} \cdot a$, l'aire de g vaut $\frac{2}{3} \cdot a$, l'aire de h vaut $\frac{3}{4} \cdot a$,
 l'aire de i vaut $\frac{2}{3} \cdot a$, l'aire de j vaut $\frac{5}{6} \cdot a$, l'aire de k vaut $\frac{5}{4} \cdot a$, l'aire de l vaut $\frac{4}{3} \cdot a$,
 l'aire de m vaut $\frac{2}{3} \cdot a$, l'aire de n vaut $1 \cdot a$, l'aire de o vaut $1 \cdot a$, l'aire de p vaut $1 \cdot a$,
 l'aire de q vaut $\frac{3}{2} \cdot a$

188.

b) $\frac{3}{4} \cdot a$ c) $\frac{4}{8} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a$ d) $\frac{7}{27} \cdot a$ e) $\frac{3}{8} \cdot a$ f) $\frac{3}{4} \cdot a$

Exercice 3

Remarque : Ce corrigé contient des notations qui ne sont pas encore acceptées dans ce cours. En effet, il utilise la barre de fraction comme une division (quand il y a un numérateur non entier, ce n'est pas une fraction!).

a) $A = -\frac{1}{10}$ $B = \frac{1}{10}$ $C = \frac{2.5}{10}$ $D = \frac{6}{10}$ $E = \frac{9.5}{10}$ $F = \frac{12}{10}$
 $A = -\frac{1}{10}$ $B = \frac{1}{10}$ $C = \frac{1}{4}$ $D = \frac{3}{5}$ $E = \frac{19}{20}$ $F = \frac{6}{5}$
 $A = -0,1$ $B = 0,1$ $C = 0,25$ $D = 0,6$ $E = 0,95$ $F = 1,2$

b) $A = -\frac{1}{12}$ $B = \frac{2}{12}$ $C = \frac{3}{12}$ $D = \frac{6}{12}$ $E = \frac{8}{12}$ $F = \frac{10.5}{12}$
 $A = -\frac{1}{12}$ $B = \frac{1}{6}$ $C = \frac{1}{4}$ $D = \frac{1}{2}$ $E = \frac{2}{3}$ $F = \frac{7}{8}$
 $A \cong -0,083$ $B \cong 0,167$ $C = 0,25$ $D = 0,5$ $E \cong 0,667$ $F = 0,875$

c) $A = -\frac{2}{8}$ $B = \frac{1}{8}$ $C = \frac{5}{8}$ $D = \frac{6}{8}$ $E = \frac{7.5}{8}$ $F = \frac{11}{8}$
 $A = -\frac{1}{4}$ $B = \frac{1}{8}$ $C = \frac{5}{8}$ $D = \frac{3}{4}$ $E = \frac{15}{16}$ $F = \frac{11}{8}$
 $A = -0,25$ $B = 0,125$ $C = 0,625$ $D = 0,75$ $E = 0,9375$ $F = 1,375$

d) $A = 1 - \frac{1}{7}$ $B = 1 + \frac{0.5}{7}$ $C = 1 + \frac{3.5}{7}$ $D = 1 + \frac{5}{7}$ $E = 2 + \frac{1}{7}$ $F = 2 + \frac{3}{7}$
 $A = \frac{6}{7}$ $B = \frac{15}{14}$ $C = \frac{3}{2}$ $D = \frac{12}{7}$ $E = \frac{15}{7}$ $F = \frac{17}{7}$
 $A \cong 0,857$ $B \cong 1,071$ $C = 1,5$ $D \cong 1,714$ $E \cong 2,143$ $F \cong 2,429$

$$e) \quad A = -6 - \frac{2}{10} \quad B = -6 - \frac{0.5}{10} \quad C = -6 + \frac{3}{10} \quad D = -6 + \frac{5.5}{10} \quad E = -6 + \frac{8}{10} \quad F = -5 + \frac{1}{10}$$

$$A = -\frac{31}{5} \quad B = -\frac{121}{20} \quad C = -\frac{57}{10} \quad D = -\frac{109}{20} \quad E = -\frac{26}{5} \quad F = -\frac{49}{10}$$

$$A = -6,2 \quad B = -6,05 \quad C = -5,7 \quad D = -5,45 \quad E = -5,2 \quad F = -4,9$$

$$f) \quad A = \frac{110}{100} - \frac{1}{100} \quad B = \frac{110}{100} + \frac{2}{100} \quad C = \frac{110}{100} + \frac{2.5}{100} \quad D = \frac{110}{100} + \frac{6}{100} \quad E = \frac{110}{100} + \frac{8}{100} \quad F = \frac{120}{100} + \frac{2}{100}$$

$$A = \frac{109}{100} \quad B = \frac{28}{25} \quad C = \frac{9}{8} \quad D = \frac{29}{25} \quad E = \frac{59}{50} \quad F = \frac{61}{50}$$

$$A = 1,09 \quad B = 1,12 \quad C = 1,125 \quad D = 1,16 \quad E = 1,18 \quad F = 1,22$$

Exercice 4

$$a. \quad \frac{170}{340} = \frac{17 \cdot 10}{17 \cdot 20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$b. \quad \frac{17 + 60}{17 + 51} \neq \frac{60}{51} = \frac{20}{17}$$

$$c. \quad \frac{17 + 17}{17 + 17 + 17} = \frac{17 \cdot 2}{17 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$d. \quad \frac{117}{217} \neq \frac{11}{21}$$

$$e. \quad \frac{17^4}{17^2} = \frac{17^2 \cdot 17^2}{17^2} = 17^2$$

$$f. \quad \frac{17 + 17 + 18}{17 + 18} \neq 17$$

$$g. \quad \frac{17^2 + 17^3}{17^2} = \frac{17^2}{17^2} + \frac{17^3}{17^2} = 1 + 17 = 18$$

Exercice 5

Ici aussi il y a une erreur. Il faut lire sous 2) $\frac{20}{100}$ à la place de $\frac{22}{110}$.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{18}{45} = \frac{6}{15} = \frac{20}{50} = \frac{42}{105} = \frac{14}{35} = \frac{18}{45} = 0,4$$

$$\frac{1}{5} = \frac{6}{30} = \frac{18}{90} = \frac{3}{15} = \frac{22}{110} = \frac{42}{210} = \frac{7}{35} = \frac{9}{45} = 0,2$$

$$\frac{9}{4} = \frac{36}{16} = \frac{72}{32} = \frac{27}{12} = \frac{180}{80} = \frac{90}{40} = \frac{720}{320} = \frac{99}{44} = 2,25$$

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24} = \frac{18}{27} = \frac{10}{15} = \frac{22}{33} = \frac{42}{63} = \frac{26}{39} = \frac{30}{45} = 0,\bar{6}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{21}{14} = \frac{27}{18} = \frac{42}{28} = \frac{93}{62} = \frac{105}{70} = 1,5$$

$$\frac{3}{7} = \frac{9}{21} = \frac{18}{42} = \frac{33}{77} = \frac{27}{63} = \frac{42}{98} = \frac{15}{35} = \frac{21}{49} = 0,\overline{428571}$$

Exercice 6

$$a. \frac{19 \cdot 3 + 19}{38} = \frac{19 \cdot 4}{19 \cdot 2} = 2$$

$$b. \frac{47 \cdot 43 - 47 \cdot 3}{47 \cdot 43 + 47 \cdot 3} = \frac{47 \cdot 40}{47 \cdot 46} = \frac{40}{46} = \frac{20 \cdot 2}{23 \cdot 2} = \frac{20}{23}$$

$$c. \frac{51 \cdot 37 \cdot 6}{3 \cdot 37 \cdot 4 \cdot 51} = \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$d. \frac{197}{195 + 197 + 199} = \frac{197}{197 - 2 + 197 + 197 + 2} = \frac{197}{197 + 197 + 197} = \frac{197}{197 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$e. \frac{769 - 810}{810 - 769} = \frac{-(810 - 769)}{810 - 769} = -1$$

$$f. \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 50}{25 \cdot 30 \cdot 8} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 25}{25 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{6}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$$g. \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{1}{6 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{1}{12'870}$$

$$h. \frac{12 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 96}{8 \cdot 36 \cdot 72} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 12}{8 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 12}{3 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 6} = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 64$$

Exercice 7

$$1) \frac{15}{75} = \frac{15}{5 \cdot 15} = \frac{1}{5}$$

$$6) \frac{2835}{7200} = \frac{3^4 \cdot 5 \cdot 7}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \frac{3^2 \cdot 7}{2^5 \cdot 5} = \frac{63}{160}$$

$$2) \frac{560}{49} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 10}{7 \cdot 7} = \frac{80}{7}$$

$$7) \frac{256}{1} = 256 \text{ est une fraction irréductible}$$

$$3) \frac{23}{40} \text{ est irréductible car } 23 \text{ est premier.}$$

$$8) \frac{333}{3333} = \frac{3 \cdot 111}{3 \cdot 1111} = \frac{111}{1111}$$

$$4) \frac{73}{73} = \frac{1}{1} = 1$$

$$9) \frac{10000}{1000000} = \frac{1}{100}$$

$$5) \frac{49}{560} = \frac{7}{80}$$

$$10) \frac{9540}{10780} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 53}{2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11} = \frac{3^2 \cdot 53}{7^2 \cdot 11} = \frac{477}{539}$$

Exercice 8

Puisqu'il ne "fiche" rien les trois quarts du temps, alors il travaille pendant le quart restant. De ce quart, la moitié est insuffisante, il reste donc $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ du travail qui est suffisant.

Pendant une séance de deux heures et demie, soit 150 minutes, il reste donc un huitième de travail efficace :

$$\frac{1}{8} \cdot 150 = \frac{75}{4} = 18,75 \text{ minutes.}$$

Donc au cours d'une commission plénière de deux heures et demie, Maurice travaille correctement pendant 18 minutes 45 secondes.

Exercice 9

a) 36 b) 16'000 c) 360 d) 1000 e) 333 f) 4200 g) 720 h) 1125.

Exercice 10

$$\text{a) } \frac{4}{7} \cdot \frac{21}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{7 \cdot 5} = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$\text{b) } \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{5} = 1,8$$

$$\text{c) } 24 \cdot \frac{5}{3} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 5}{3} = 40$$

$$\text{d) } \frac{8}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\text{e) } \frac{10}{17} \cdot 1,7 = \frac{10}{17} \cdot \frac{17}{10} = 1$$

$$\text{f) } -\frac{20}{11} \cdot \frac{44}{8} = -\frac{20 \cdot 4 \cdot 11}{11 \cdot 4 \cdot 2} = -10$$

$$\text{g) } -\frac{2}{9} \cdot \frac{18}{4} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 9}{9 \cdot 2 \cdot 2} = -1$$

$$\text{h) } \frac{-1}{4} \cdot \frac{-4}{10} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\text{i) } 1,44 \cdot \frac{1}{12} = \frac{12 \cdot 12 \cdot 1}{100 \cdot 12} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} = 0,12$$

Exercice 11

$$\text{a) } \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 10} = \frac{3}{2 \cdot 10} = \frac{3}{20}$$

$$\text{e) } \frac{14}{28} \cdot \frac{38}{49} = \frac{14 \cdot 38}{28 \cdot 49} = \frac{14 \cdot 2 \cdot 19}{2 \cdot 14 \cdot 49} = \frac{19}{49}$$

$$\text{b) } \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{2}{3}$$

$$\text{f) } \frac{2}{7} \cdot \frac{21}{36} = \frac{2 \cdot 21}{7 \cdot 36} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{c) } \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 3}{12 \cdot 10} = \frac{3}{40}$$

$$\text{g) } \frac{6}{2} \cdot \frac{8}{11} = \frac{6 \cdot 8}{2 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 11} = \frac{24}{11}$$

$$\text{d) } \frac{9}{10} \cdot \frac{20}{36} = \frac{9 \cdot 20}{10 \cdot 36} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 10}{10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = \frac{1}{2}$$

$$\text{h) } \frac{22}{51} \cdot \frac{17}{3} = \frac{22 \cdot 17}{51 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 17}{3 \cdot 17 \cdot 3} = \frac{22}{9}$$

Exercice 12

Soient r, s deux nombres rationnels. Par définition de \mathbb{Q} , il existe des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ qui les représentent. En particulier les nombres a, b, c, d sont des entiers relatifs et les dénominateurs b, d sont non nuls. Calculons donc le produit $r \cdot s = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$. Par définition de la multiplication c'est

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b}$$

où nous avons utilisé la commutativité du produit dans \mathbb{Z} au numérateur et au dénominateur. On reconnaît ici la définition du produit $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = s \cdot r$ et le résultat est démontré.

Pour l'associativité qui se trouve dans les vidéos : Soient r, s, t trois nombres rationnels. Par définition de \mathbb{Q} , il existe des fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ qui les représentent. En particulier les nombres a, b, c, d, e et f sont des entiers relatifs et les dénominateurs b, d et f sont non nuls. Calculons donc le produit $r \cdot (s \cdot t) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right)$. Par définition de la multiplication c'est

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c \cdot e}{d \cdot f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

où nous avons enlevé les parenthèses superflues dans la multiplication des numérateurs et des dénominateurs par associativité du produit dans \mathbb{Z} . On assemble maintenant les termes autrement

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{e}{f} = (r \cdot s) \cdot t$$

et le résultat est démontré.