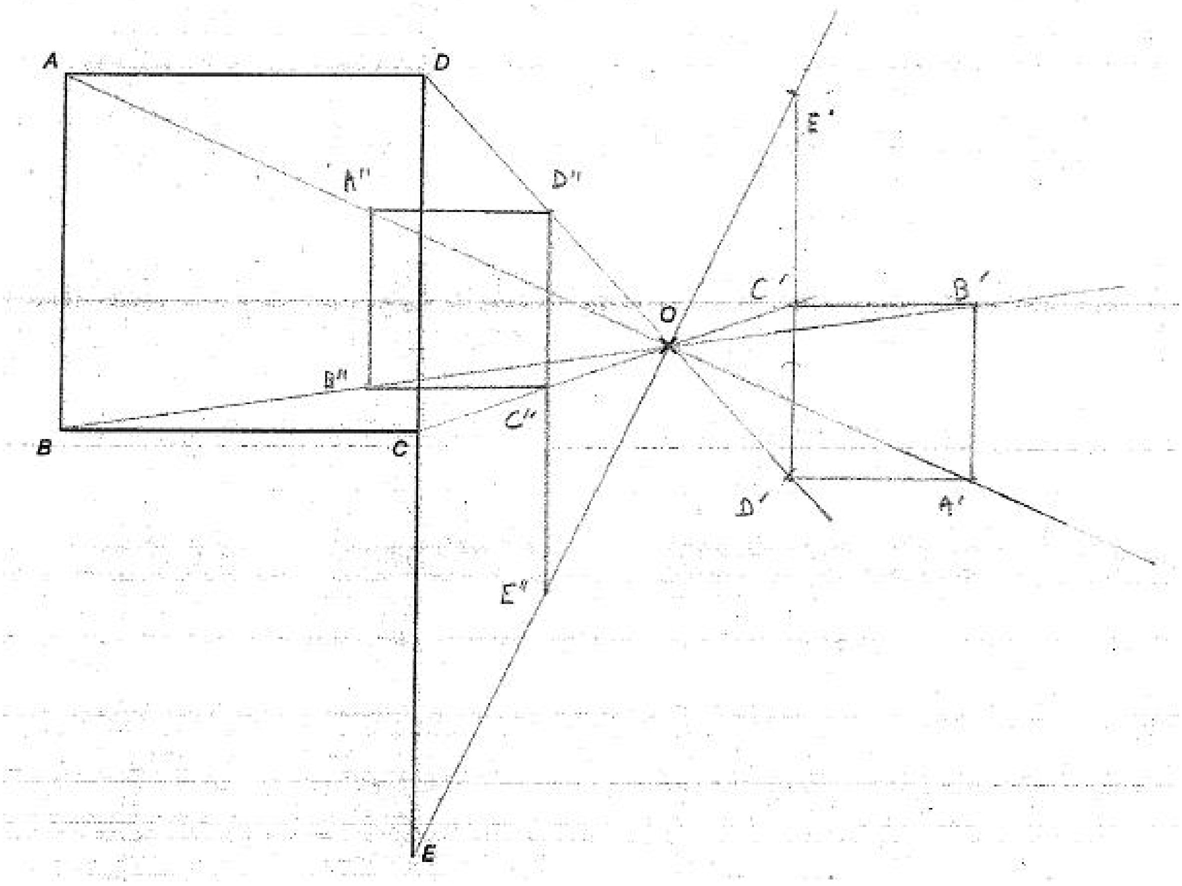
Cours Euler: Corrigé 33

le 8 juin 2022

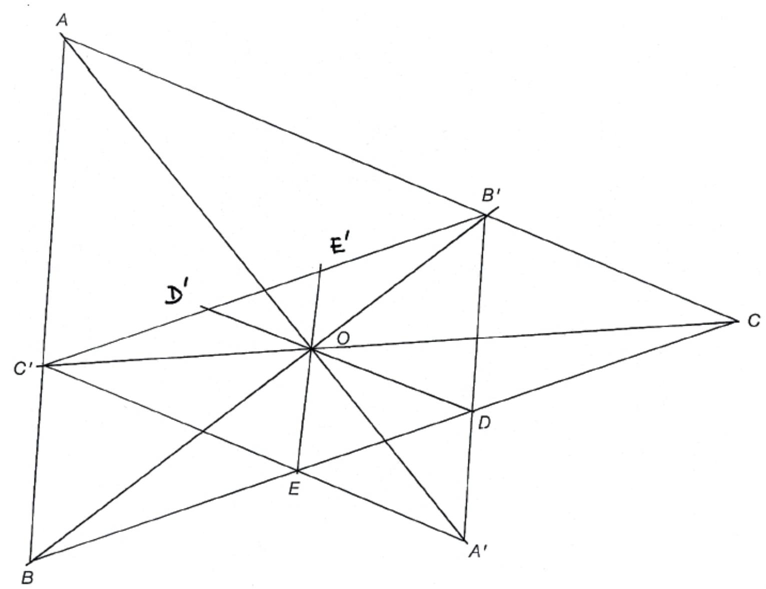
Exercice 1

On travaille ici avec l'homothétie $h(O, -\frac{1}{2})$ qui fixe O et transforme un point P différent de O en un point P' sur la droite OP de sorte que le rapport de section $(P'P, O)$ soit $-1/2$; et avec l'homothétie $h(O, \frac{1}{2})$ qui fixe O et transforme un point P différent de O en un point P' sur la droite OP de sorte que le rapport de section $(P'P, O)$ soit $1/2$. On construit l'image du drapeau $ABCDE$ par les homothéties $h(O, -\frac{1}{2})$ et $h(O, \frac{1}{2})$.
Cet exercice illustre le fait vu en cours qu'une homothétie négative, ici $h(O, -\frac{1}{2})$, est la composée d'une homothétie positive, $h(O, \frac{1}{2})$, avec une symétrie centrale de centre O. Ainsi, on remarque que pour tout point P, P' est l'image P'' par la symétrie centrale de centre O qui est lui-même l'image de P par l'homothétie $h(O, \frac{1}{2})$. Pour finir, on a aussi : $\overline{OP'} = \overline{OP''}$.



Exercice 2

Dans cette homothétie $\mathcal{H}(O, \dfrac{A'B'}{AB})$, le centre O se situe à l'intersection des segments $[AA']$ et $[BB']$. Pour déterminer l'emplacement des points E' et D', il suffit de tracer les droites EO et DO et de chercher leurs intersections respectives avec le segment $[B'C']$.



Exercice 3

Comme les angles indiqués en E et D sont droits, cela signifie que ces points se trouvent sur le cercle de Thalès du segment $[BC]$. Par conséquent les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{CED}$ sont isométriques par le Théorème de l'angle inscrit puisqu'ils interceptent le même arc. Il en va de même des angles $\widehat{BCE}$ et $\widehat{BDE}$. Comme de plus les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont opposés par le sommet et donc isométriques on conclut par le premier cas de similitude que les triangles ΔBAC et ΔDAE sont semblables.

Exercice 4

On reprend la figure et les notations de la preuve du deuxième cas de similitude des triangles faite dans le cours.

Premier cas de similitude. Hypothèses :

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= \widehat{A'B'C'} \\ \widehat{ACB} &= \widehat{A'C'B'}. \end{aligned}$$

Posons $r = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$. Transformons le triangle $\triangle ABC$ par l'homothétie $h(A, r)$. A reste fixe ; B et C sont tranformés en B'' et C''. Il suffit alors de montrer que les triangles $\triangle AB''C''$ et $\triangle A'B'C'$ sont semblables. Or ils sont dans le premier cas d'isométrie des triangles. En effet

$$\begin{aligned} \widehat{A''B''C''} &= \widehat{ABC} \\ \widehat{ABC} &= \widehat{A'B'C'}. \end{aligned}$$

Donc $\widehat{A''B''C''} = \widehat{A'B'C'}$. De même, $\widehat{A''C''B''} = \widehat{A'C'B'}$. De plus, $\overline{B''C''} = r\overline{BC} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Notons donc f la similitude qui envoie $\triangle A'B'C'$ sur $\triangle AB''C''$. Alors $\triangle A'B'C'$ est l'image de $\triangle ABC$ par $f \circ h(A, r)$, qui est une similitude. Ce qui démontre le premier cas de similitude des triangles.

Troisième cas de similitude.
Hypothèses :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} =: r.$$

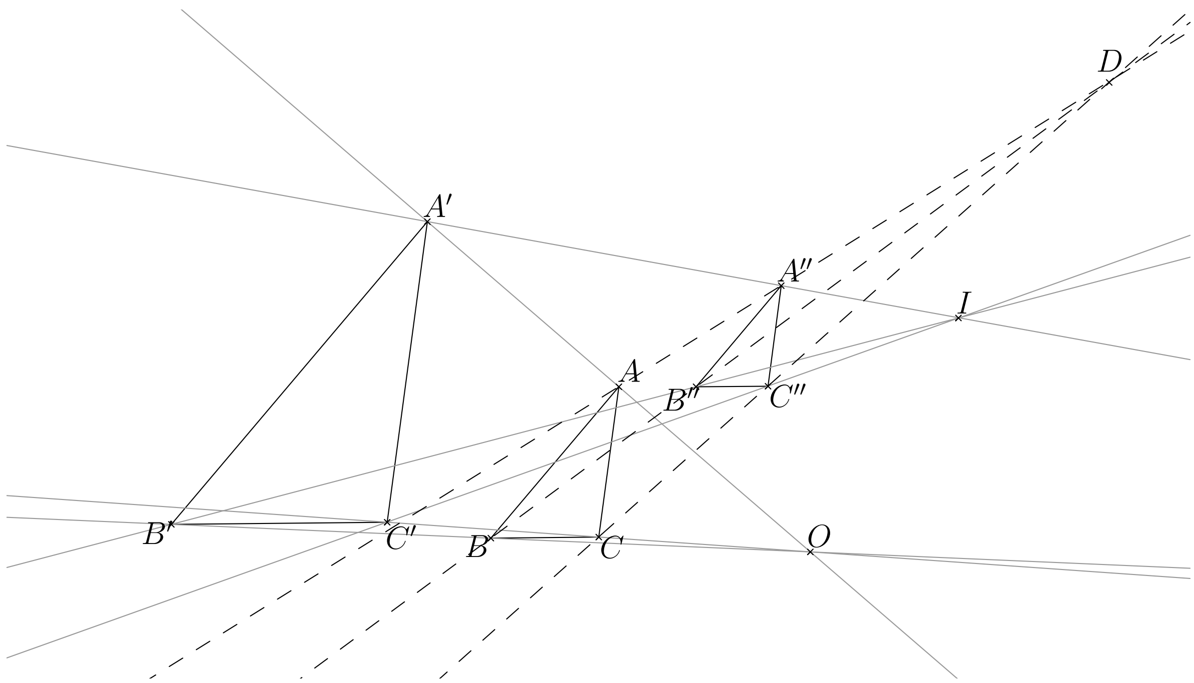
Transformons le triangle $\triangle ABC$ en $\triangle A''B''C''$ par l'homothétie $h(A,r)$. Les triangles $\triangle AB''C''$ et $\triangle A'B'C'$ sont dans le troisième cas d'isométrie des triangles :

$$\begin{aligned}
\overline{AB''} &= r\overline{AB} &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\overline{AB} = \overline{A'B'}\\
\overline{B''C''} &= r\overline{BC} &= \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}\overline{BC} = \overline{B'C'}\\
\overline{AC''} &= r\overline{AC} &= \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}\overline{AC} = \overline{A'C'}.
\end{aligned}$$

Notons donc g la similitude qui envoie $\triangle A'B'C'$ sur $\triangle AB''C''$. Alors $\triangle A'B'C'$ est l'image de $\triangle ABC$ par $g \circ h(A,r)$, qui est une similitude. Ce qui démontre le troisième cas de similitude des triangles.

Exercice 5

Il s'avère, mais nous ne le prouverons pas ici, que la composée de deux homothéties dont les rapports r et r' ne sont pas inverses l'un de l'autre (c'est-à-dire tels que $r \cdot r' \neq 1$) est une homothétie de rapport $r \cdot r'$. Si $[AB]$ est un segment, on obtient le centre de la composée par l'intersection des droites AA'' et BB'', où A'' et B'' sont les images de A et B sous la composée des homothéties. Dans la figure suivante, le point D est le centre de l'homothétie composée.



Exercice 6

Remarque : par un léger abus de notation, on écrit $\overline{AB}$ la distance de A et B même lorsque A et B sont confondus (alors que cette notation est au départ définie pour les segments seulement).

1. On considère une similitude f, et deux points A et B tels que $f(A) = f(B)$. Si on montre que $A = B$, alors cela signifiera que f est injective.

   Par définition, il existe un nombre réel positif non nul r tel que pout tout couple de points S et T, $\overline{f(S)f(T)} = r\overline{ST}$. En particulier, $\overline{f(A)f(B)} = r\overline{AB}$ Or $f(A)$ et $f(B)$ représentent le même point donc $0 = \overline{f(A)f(B)} = r\overline{AB}$. Et comme r est non nul, alors $\overline{AB} = 0$, ce qui n'est possible que si A=B. Donc A=B.

   On conclut que f est injective.

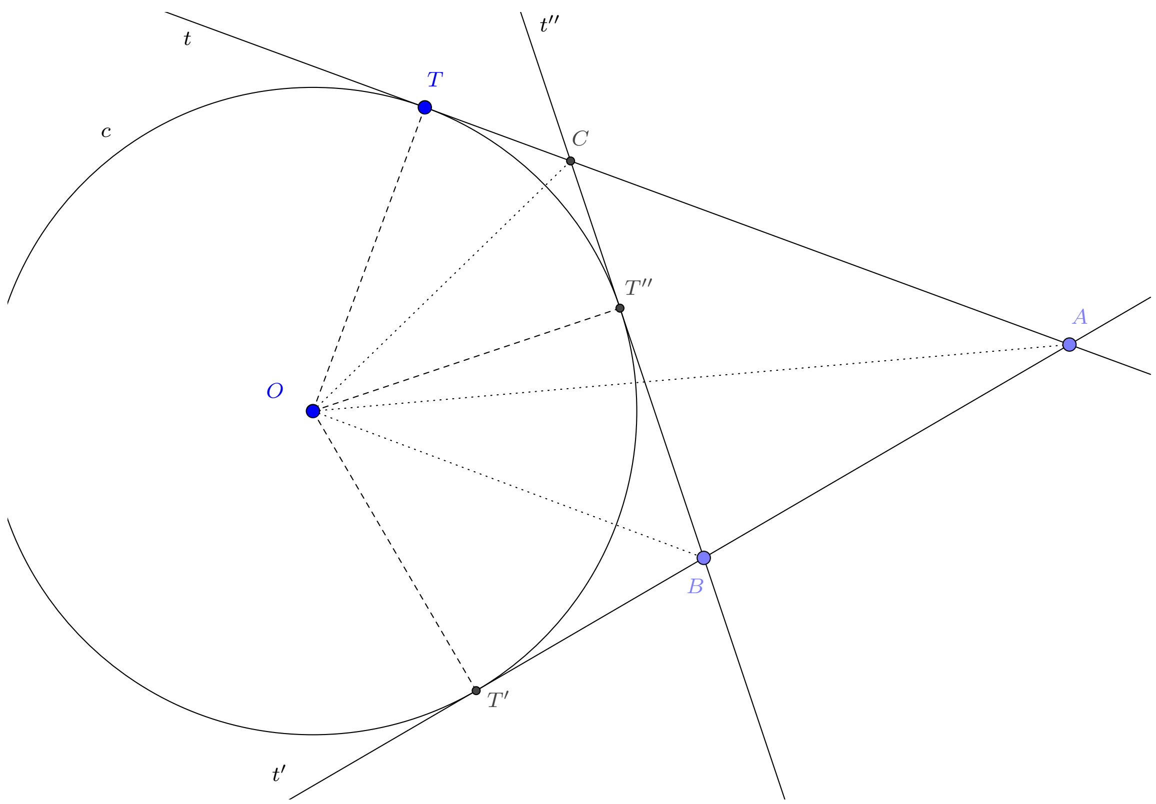
2. Soit f une similitude de rapport r et g une similitude de rapport s. On note $h = g \circ f$. Montrons que h est une similitude de rapport rs.
Par définition de g, on a en particulier : $\overline{g(f(A))g(f(B))} = s\overline{f(A)f(B)}$. Or par définition de f, on a aussi $\overline{f(A)f(B)} = r\overline{AB}$.
D'où
$$\overline{h(A)h(B)} = \overline{g \circ f(A)g \circ f(B)} = \overline{g(f(A))g(f(B))} = s\overline{f(A)f(B)} = sr\overline{AB} = rs\overline{AB}.$$
De plus comme rs est un nombre réel positif non nul, on conclut : h est une isométrie de rapport rs.

3. Soit f une isométrie. Par le théorème de classification des isométries, on peut écrire $f = g \circ h$, où g est une isométrie et h une homothétie. Or, cela a été vu en cours : un isométrie est bijective, donc g est bijective ; une homothétie est bijective, donc h est bijective. Reste à montrer que la composée de deux bijections est une bijection. Soit P'' un point du plan. Comme g est bijective, il existe un unique point P' tel que $g(P') = P''$. Comme h est bijective, il existe un unique point P tel que $h(P) = P'$. Finalement, $P'' = g(P') = g(h(P)) = g \circ h(P) = f(P)$, et ce point P est unique. Donc f est bien bijective.

Exercice 7

Construction. (24 points) On se donne un cercle c de centre O, un point A à l'extérieur du cercle et un point T'' du cercle.

(1) (9 points) Construis à la règle et au compas uniquement les tangentes t et t' à c passant par A. On appellera T et T' les points de tangence. Construis aussi la tangente t'' à c passant par T''. On appellera B et C les points d'intersection de t'' avec t et t'.



(2) (7 points) Donne la marche à suivre de ta construction.

1. Tracer le cercle de Thalès du segment $[OA]$. Ce cercle coupe c en deux points T et T'.
2. Tracer les droites $t = AT$ et $t' = AT'$, ce sont les tangentes cherchées passant par A.
3. Tracer la perpendiculaire t'' au rayon OT'', c'est la tangente cherchée passant par T''.

(3) (8 points) Si la longueur $\overline{AT}$ vaut 12 mètres, quel sera le périmètre du triangle ΔABC ?

On observe que les distances $\overline{AT}$ et $\overline{AT'}$ sont égales par le Théorème de Pythagore pour les triangles rectangles ΔAOT et $\Delta AOT'$. De même $\overline{CT} = \overline{CT''}$ et $\overline{BT'} = \overline{BT''}$. Par conséquent le périmètre du triangle ΔABC vaut (en mètres)

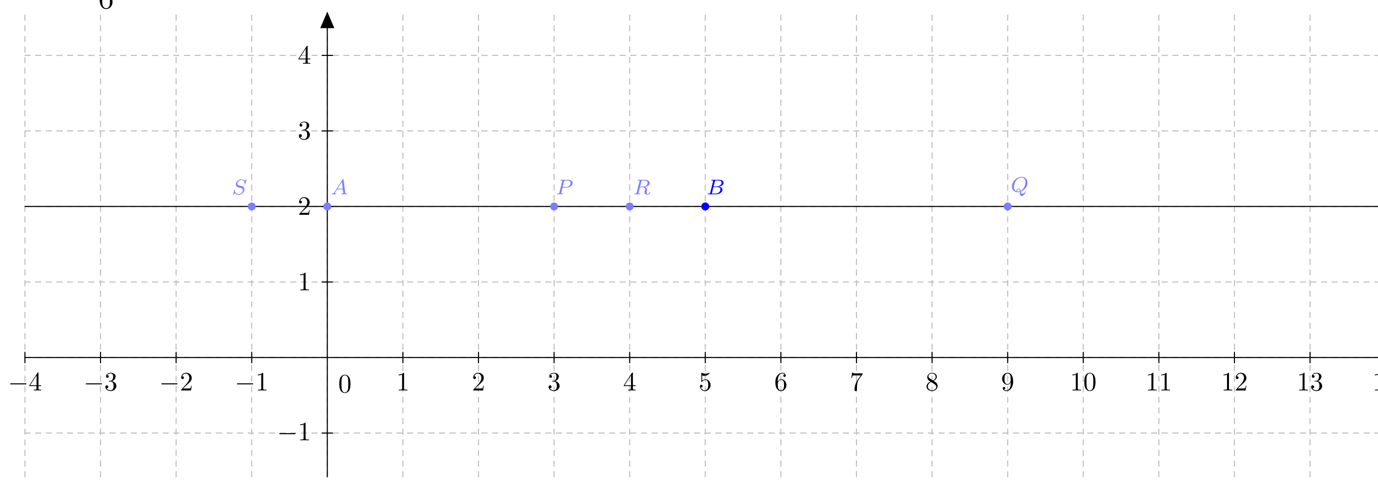
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA} = \overline{AB}+\overline{BT''}+\overline{T''C}+\overline{CA} = \overline{AB}+\overline{BT'}+\overline{TC}+\overline{CA} = \overline{AT'}+\overline{TA} = 2\cdot\overline{AT} = 24$$

Exercice 8

Rapport de section. (24 points)

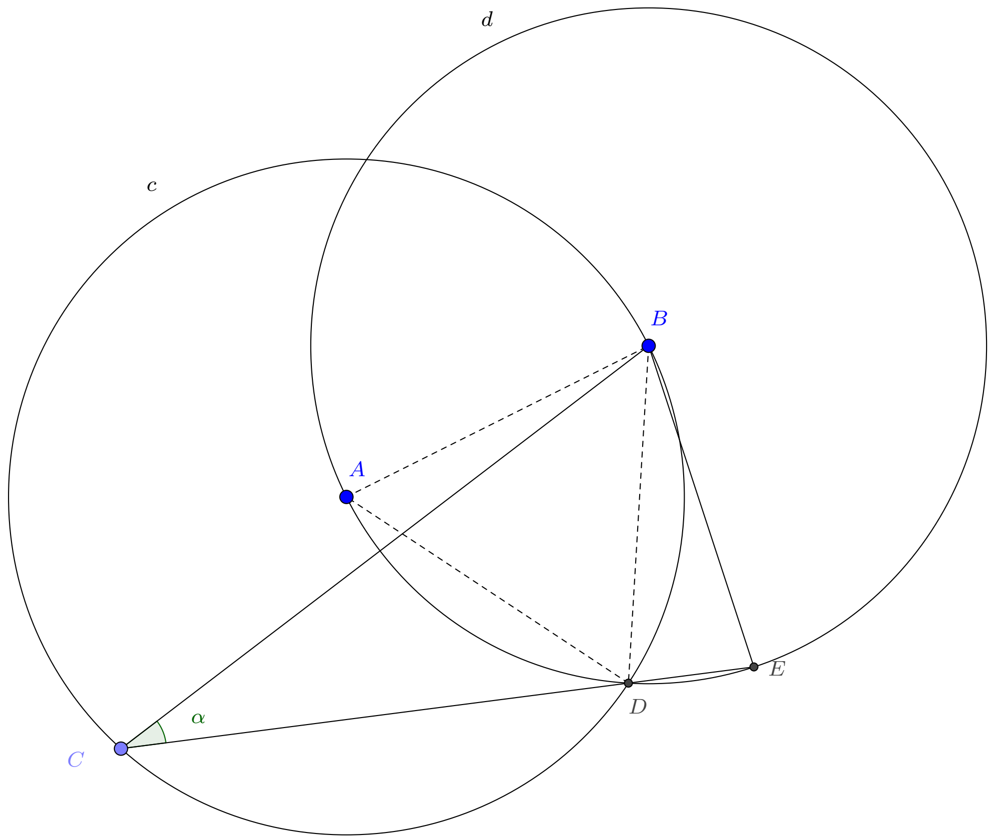
(1) **12 points.** Le rapport de section (AB, P) est négatif car P se trouve entre A et B. Celui de (AB, Q) est positif. On a $r(AB, P) = -\dfrac{3}{2}$ et $r(AB, Q) = \dfrac{9}{4}$.

(2) **12 points.** Voici les points R et S tels que le rapport de section $r(AB, R) = -4$ et $r(AB, S) = 0{,}1\bar{6} = \dfrac{1}{6}$.



Exercice 9

Un problème. (14 points) Le triangle ΔABC, en traitillés sur la figure ci-dessous, est équilatéral puisque ses trois côtés sont des rayons des cercles c ou d. Ceux-ci ont même rayon car $[AB]$ est un rayon commun.
L'angle $\alpha = \widehat{BCE}$ est un angle inscrit pour le cercle c qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{BAD}$. Celui-ci vaut 60°. On conclut par le Théorème de l'angle au centre que $\alpha = 30°$.



Exercice 10

Un peu de théorie. (26 points)

(1) **10 points.** Vrai ou faux ? De tous les parallélogrammes dont les côtés mesurent a et b, celui qui a la plus grande aire est le rectangle. C'est vrai. L'aire d'un parallélogramme de base b est $b \cdot h$ oò h est la distance entre les deux bases parallèles de longueur b. Cette distance h est toujours plus petite ou égale à a. Par conséquent l'aire sera maximale lorsque $a = h$, c'est-à-dire lorsque les angles du parallélogramme sont droits.

(2) **16 points.** Démontre le Théorème de l'angle inscrit dans la situation ci-dessous oò le centre O du cercle se trouve sur le diamètre $[SB]$.
Revois ton cours ! On peut utiliser le fait que le triangle ΔOSA est isocèle. Il a par conséquent deux angles isométriques. On utilise ensuite la formule de la somme des angles d'un triangle pour calculer l'angle supplémentaire à l'angle cherché.

Exercice 11

Rectangle ? (20 points)

(1) **10 points.** En marchant dans la salle de gymnastique Emmy remarque qu'elle fait exactement 30 petits pas pour parcourir la salle dans sa largeur et 40 pour parcourir la salle dans sa longueur. Elle se demande alors si vraiment la salle est rectangulaire et décide de mesurer une diagonale : 50 petits pas. La salle est-elle bien construite à angle droit ? Justifie ta réponse !
Puisque $30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 = 50^2$ on conclut de la réciproque du Théorème de Pythagore que le triangle formé des deux côtés de la salle de gym est rectangle. La salle est donc rectangulaire.

(2) **10 points.** Vrai ou faux ? Pour construire un beau triangle rectangle, c'est facile !, il suffit de choisir des cathètes de 2 cm et 3 cm, et une hypoténuse de 4 cm. Justifie ta réponse !
C'est faux. Puisque $2^2 + 3^2 = 13 \neq 16 = 4^2$ on conclut de la contraposée du Théorème de Pythagore que le triangle n'est pas rectangle.