II. Probabilités

Vous avez vu l'année passée le début de la combinatoire, avec les permutations, les arrangements et les combinaisons. Nous terminons aujourd'hui le sujet de combinatoire avec quelques formules de comptage et commençons le calcul des probabilités, intimement lié à la théorie des ensembles...

1 Les coefficients multinomiaux

Pour terminer le chapitre consacré à la combinatoire, nous généralisons les coefficients binomiaux.

Définition 1.1. Soit $n_1, \ldots, n_r$ des nombres entiers et $n = n_1 + \cdots + n_r$. Le *coefficient multinomial* est

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}. \qquad \left(= \bar{P}(n_1, n_2, \ldots n_r)\right)$$

Lorsque $r = 2$, on voit que $\binom{n}{n_1, n_2}$ est simplement le coefficient binomial $\binom{n}{n_1}$

$(n_1 \leq n)$

Il compte donc le nombre de combinaisons possibles de n_1 objets choisis dans un ensemble de n objets. Ou encore le nombre de manières différentes de répartir n objets en deux groupes, l'un de n_1 éléments et l'autre de $n_2 = n - n_1$ éléments.

Mais que compte-t-on en général avec des coefficients multinomiaux ?

Théorème 1.2. *Le nombre de répartitions possibles de n objets distinguables en groupes de $n_1, n_2, \ldots, n_r$ objets est égal au coefficient multinomial* $\binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}$.

Exemple : nb d'anagrammes de BANANA →

$$\frac{6!}{1!\,3!\,2!} = \binom{6}{1\ 3\ 2}$$

ou encore, répartitions de 6 objets distincts en 3 groupes de 1, 3 et 2 éléments, respectivement

Démonstration. Par récurrence. Lorsque $r = 2$, c'est clair. Supposons que $r > 2$ et que le cas $r - 1$ est vrai. Pour répartir n objets en r groupes de $n_1, \ldots, n_r$ éléments,

H.R.

On commence par choisir un groupe de n_r éléments
Il y a $\binom{n}{n_r}$ choix possibles.
Il reste alors $n-n_r$ éléments à répartir en $r-1$ groupes.
Par hypothèse de récurrence, il y a $\binom{n-n_r}{n_1, n_2, \dots, n_{r-1}}$ possibilités.
Nb total de possibilités *: $\binom{n}{n_r} \cdot \binom{n-n_r}{n_1, n_2, \dots, n_{r-1}} = \frac{n!}{n_r!\,\cancel{(n-n_r)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_r)!}}{n_1!\, n_2! \dots n_{r-1}!}$

(*) Principe fondamental de la combinatoire. $= \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ □

Exemple 1.3. Dans un camp, 14 élèves doivent choisir l'une des activités suivantes : canoé, escalade et spéléologie. Sachant qu'il y a trois canoés de 2 places (mais qu'une place est prise par le moniteur), 4 harnais disponibles, et 5 lampes de poches, combien de répartitions y a-t-il ?

Il y en a $\binom{14}{5, 4, 5} = \frac{14!}{5! \cdot 4!\ 5!} = 252'252$.

Pour terminer, voici le *Théorème multinomial*, qui généralise celui du binôme de Newton. La preuve est élémentaire.

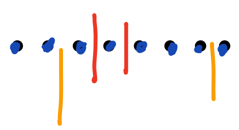
Théorème 1.4. *On a* $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{(n_1,\ldots,n_r)} \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$.

2 Répartitions des boules dans des urnes

Voici une application des principes combinatoires que vous avez vus l'année passée. Le problème est de répartir des boules identiques dans des urnes. Disons que l'on dispose de n boules et de r urnes.

Exemple 2.1. On cherche à répartir 8 boules noires dans 3 urnes. On peut par exemple en placer 3 dans la première urne, puis une dans la deuxième, et 4 dans la dernière.
Pour compter le nombre de répartitions possibles, imaginons que nous alignions les huit boules comme ceci :

PAS d'urne vide



Il reste à les séparer en trois groupes. en plaçant 2 traits verticaux dans deux espaces parmi 7 espaces possibles.

$$\Rightarrow \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21 \text{ possibilités.}$$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Le nombre de répartition de n boules dans r urnes est* $\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$. si aucune urne vide.

Et si l'on autorise des urnes vides ? Dans la résolution précédente, on pourra donc placer plusieures barres verticales au même endroit, y compris avant la première boule ou après la dernière. Pour faciliter le comptage, nous allons voir qu'il y a une meilleure méthode.

Théorème 2.3. *Le nombre de répartition de n boules identiques dans r urnes est* $\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ *si l'on peut laisser certaines urnes vides.*

Démonstration. Le nombre de ces répartitions revient à trouver des nombres entiers $y_1, \ldots, y_r$, positifs ou nuls, avec $y_1 + \cdots + y_r = n$.

Si on ajoute une boule par urne, on obtient $x_1 = y_1 + 1, \ldots x_r = y_r + 1$.
t.q $x_1 + x_2 + \ldots x_r = n + r$.
Les nombres $x_1, \ldots x_r$ comptent le nombre de boules dans chacune de r urnes NON vides. Par le thm 2.2, cela vaut $\binom{n+r-1}{r-1}$.

• • | • | • • • • • • • •

□

Exemple 2.4. Monsieur et Madame Aubert ont fait quelques économies et pensent que le moment est venu d'investir 20000 francs en bourse. Ils peuvent placer un certain nombre de milliers de francs en actions suisses, en actions de la zone Euro, en action américaines, ou encore en obligations. Combien de stratégies se présentent ?

- Si chaque possibilité est utilisée au moins une fois : $\binom{19}{3} = 969$
- Si on n'est pas obligé de tout essayer : $\binom{23}{3} = 1'771$ stratégies.
- Si on ajoute la possibilité de garder des sous dans le tiroir à chaussettes : $\binom{24}{4} = 10'626$ stratégies.

3 Les événements

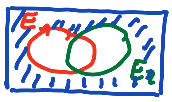
En théorie des probabilités, on s'intéresse aux résultats d'une expérience aléatoire et on cherche à analyser les différentes issues possibles. On suppose donc que l'on connaît ces issues, bien que l'on ne sache pas à l'avance laquelle sera choisie... On appelle *ensemble fondamental* l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience. On le notera S. Les éléments de S et tout sous-ensemble de S sont des *événements*. Par exemple, si l'on lance une pièce de monnaie, l'ensemble fondamental sera $S = \{P, F\}$, où P est l'abbréviation de pile et F celle de face. Si l'expérience consiste à lancer deux dés, alors il y a $6 \cdot 6 = 36$ issues possibles et

$$S = \{(i; j) \,|\, 1 \leq i, j \leq 6\}.$$

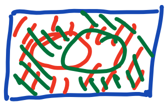
L'issue $(3; 6)$ ou encore l'issue $\{(i; i) \,|\, 1 \leq i \leq 6\}$ sont des événements ; le second est l'événement "les deux dés indiquent le même résultat". Dans ces deux exemples, l'ensemble fondamental est fini, mais il se peut aussi qu'il soit infini. Dans le cas où l'expérience consiste à mesurer la durée de vie en heures d'une ampoule économique, on a $S = \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. Ici $E = [0; 24]$ est l'événement "l'ampoule dure moins d'un jour".

On utilisera les notations usuelles de la théorie des ensembles pour effectuer des opérations sur des événements. Ainsi, si E et F sont deux événements, l'événement E^c est le *complémentaire* de E, c'est-à-dire l'événement où l'issue est n'importe quel résultat qui ne se trouve pas dans E. L'*intersection* $E \cap F$, aussi notée EF, est l'événement où l'issue est à la fois dans E et dans F. Les lois de De Morgan sont des principes élémentaires, mais fort utiles !

n = 2



S



Proposition 3.1. Lois de De Morgan
Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements. Alors

$$\left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c = \cap_{i=1}^n E_i^c \;\; et \;\; \left(\cap_{i=1}^n E_i\right)^c = \cup_{i=1}^n E_i^c.$$

Démonstration. Pour démontrer la première loi, nous allons voir que l'on a la "double inclusion" : $\left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c \subset \cap_{i=1}^n E_i^c$ et $\cap_{i=1}^n E_i^c \subset \left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c$.
Pour la première inclusion, considérons un élément $x \in \left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c$.

$$x \in \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^c} \iff x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i$$
$$\iff x \notin E_i \quad \forall i$$
$$\iff x \in E_i^c \quad \forall i$$
$$\iff x \in \underbrace{\bigcap_{i=1}^n E_i^c}$$

La deuxième inclusion se fait en exercice dans la série 2. ($\Leftarrow$ dans ce qui précède)
Pour démontrer la seconde loi de Morgan, définissons $F_i = E_i^c$.

Première loi $\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ car $(E_i^c)^c = E_i$

En prenant le complémentaire de la ligne ci-dessus, il vient.

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

□

Remarque 3.2. Un peu d'histoire. Auguste De Morgan (1806 - 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne.

4 Les axiomes des probabilités

Comment définir la probabilité d'un événement ? L'idéal serait de pouvoir faire l'expérience un grand nombre de fois et de noter les résultats. Par exemple, si on lance une pièce de monnaie 20 fois de suite, il se pourrait que ce soit la suite

$$PPFPFFPFPFFFPFFPPFPF$$

qui soit lancée. On pourrait donc dire que 9 fois sur 20 on tombe sur pile. La probabilité de lancer pile doit donc être environ $9/20 = 0,45$. On dit aussi qu'on a environ 45% de chances de lancer pile. Mais il faudrait lancer la pièce encore bien plus de fois et la probabilité de lancer pile sera la limite lorsque n tend vers l'infini du nombre de lancers qui donnent pile divisé par le nombre de lancers au total... Mais ce nombre est-il bien défini ? Et de plus peut-on le calculer vraiment ?

Au lieu de procéder comme cela, nous décidons d'utiliser une approche axiomatique, basée sur des principes élémentaires et acceptables par tous.

Définition 4.1. Soit S l'ensemble fondamental d'une expérience. Une *probabilité* est une application $P : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ telle que :

$\mathcal{P}(S)$ = ensemble des parties de S (ici ensemble des événements)

1. $P(S) = 1$
2. Si les événements $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sont disjoints, alors $P\left(\underbrace{\coprod_{i=1}^{\infty}}_{\text{réunion disjointe}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

Le nombre réel $P(E)$ est appelé *probabilité* de l'événement E.

On attribue donc un nombre entre zéro et un à chaque événement. Plus ce nombre est grand, plus la probabilité de cet événement est grande. C'est pourquoi le premier axiome dit simplement que l'issue de l'expérience est à coup sûr (avec une probabilité égale à 1) l'un des éléments de S. Le deuxième axiome dit que la probabilité de l'union de deux événements mutuellement exclusifs est la somme des probabilités de chacun d'eux.

Exemple 4.2. On lance un dé comme l'un de ceux que tu vois sur cette photo truquée :

Il se trouve que le coin commun aux faces 4, 5 et 6 est plombé si bien que l'on lance deux fois plus souvent un grand nombre qu'un petit nombre. Quelle est la probabilité de lancer un nombre pair ? L'hypothèse de départ est donc que

$$P(4) = P(5) = P(6) = 2 \cdot P(1) = 2 \cdot P(2) = 2 \cdot P(3)$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} = \{1\} \amalg \{2\} \amalg \{3\} \amalg \{4\} \amalg \{5\} \amalg \{6\}$$

$$1 \overset{1}{=} P(S) \overset{2}{=} P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$
$$= 3 \cdot P(1) + 6 \cdot P(1) = 9 \cdot P(1)$$

d'où $P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{9}$ et $P(4) = P(5) = P(6) = \frac{2}{9}$

$$\Rightarrow P(\text{pair}) = P(\{2,4,6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{5}{9} \simeq 55{,}6\%$$

Déduisons à présent quelques propriétés élémentaires à partir des axiomes. Ces propriétés seront donc toujours vraies! Si l'on s'intéresse comme dans l'exemple ci-dessus au lancer d'un dé, ces propriétés ne nous dirons pas si le dé est pipé ou non... La première de ces propriétés affirme que la probabilité de l'événement "vide" est nulle (on n'a aucune chance de ne pas avoir d'issue à une expérience).

Proposition 4.3. *On a* $P(\emptyset) = 0$.

Démonstration. Considérons les événements mutuellement exclusifs $\underline{E_1 = S}$, $E_2 = \emptyset$, $E_3 = \emptyset$, etc. Alors nous savons que

$$1 \overset{(1)}{=} P(S) \overset{(2)}{=} \underbrace{P(S)}_{=1} + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots$$

Ainsi, $P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$ □

Ceci nous permet dans un premier temps de montrer que l'axiome (2) est vrai aussi si on traite le cas d'une union disjointe *finie* d'événements. Il suffit d'appliquer le deuxième axiome en ajoutant un nombre infini d'événements vides.

Théorème 4.4. *Soit* $E_1, \ldots, E_n$ *des événements. Alors* $P\left(\coprod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

Le résultat suivant nous dit que la probabilité qu'un événement n'arrive pas vaut 1 moins la probabilité que cet événement arrive.

Théorème 4.5. *Soit* E *un événement. Alors* $P(E^c) = 1 - P(E)$.

$E^c \cap E = \emptyset$
$E^c \cup E = S$
$\Rightarrow \underbrace{P(S)}_{=1} = P(E) + P(E^c)$ #

Si F est un événement contenu dans E, alors E est plus probable que F.

Théorème 4.6. *Soient* $F \subset E$ *des événement. Alors* $P(F) \leq P(E)$.

Démonstration. Puisque F est contenu dans E, on peut exprimer E comme union disjointe de F et de l'événement $F^c \cap E$. Par conséquent, on a $P(E) = P(F) + P(F^c \cap E)$ ce qui montre le théorème. □

Voici peut-être la formule élémentaire la plus utile en pratique :

Théorème 4.7. *Soient E et F deux événements. Alors* $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

Démonstration.

$$E \cup F = (E \setminus F) \amalg (F \setminus E) \amalg (E \cap F)$$

2 $$P(E \cup F) = (P(E \setminus F)) + (P(F \setminus E)) + P(E \cap F)$$

Mais $E = (E \setminus F) \amalg (E \cap F)$ et $F = (F \setminus E) \amalg (E \cap F)$

$$P(E \cup F) = (P(E) - P(E \cap F)) + (P(F) - \cancel{P(E \cap F)}) + P(\cancel{E \cap F})$$

$$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

□

Exemple 4.8. On tire 13 cartes d'un jeu de 52. Déterminer la probabilité que exactement trois de ces cartes soient des rois.

E = 3 cartes sont des rois

$$P = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{|E|}{|S|}$$

$$|S| = C_{13}^{52} = \binom{52}{13} \quad \text{et} \quad |E| = C_3^4 \cdot C_{10}^{48}$$

$$P(E) = \frac{C_3^4 \cdot C_{10}^{48}}{C_{13}^{52}} \cong 4{,}12\%$$

Exemple 4.9. Quelle est la probabilité que deux élèves du cours Euler (il y en a 25) aient leur anniversaire le même jour ?

$$P = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots\ldots \cdot 341}{365 \cdot 365 \cdot 365 \ldots \cdot 365} = \frac{A_{25}^{365}}{365^{25}}$$

$$= 0{,}4313 = 43{,}13\%$$

$\Rightarrow$ P(au moins 2 personnes ont leur anniv. le m̂ jour)

$$= 1 - 0{,}4313 = 0{,}5687 = 56{,}87\%$$

Donc plus d'une chance sur deux.