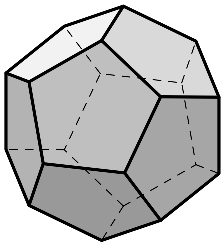
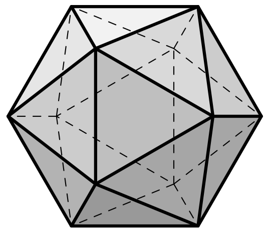
EPFL — Cours Euler 31.08.2022
Deuxième année

Série 2

Remarque. Cette série sert entres autres d'introduction aux remarquables cinq *solides platoniciens* : le tétraèdre régulier (dont les 4 faces sont des triangles équilatéraux), le cube, l'octaèdre régulier (dont les 8 faces sont des triangles équilatéraux), le dodécaèdre régulier (dont les 12 faces sont des pentagones réguliers), et l'icosaèdre (dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux). Voici à quoi ressemblent ces deux derniers solides :





Exercice 1. Soient α et β deux plans qui forment un angle t entre eux (avec $0 < t < \frac{\pi}{2}$), $ABCD$ un carré appartenant à α, et $A'B'C'D'$ la projection orthogonale de $ABCD$ sur β.

(a) Dans le cas où AB est parallèle à la droite d'intersection d de α et β, montre que l'aire de la projection est obtenue en multipliant l'aire d'origine par $\cos(t)$:

$$\sigma(A'B'C'D') = \sigma(ABCD) \cdot \cos(t).$$

(b) Déduis que la projection orthogonale F' sur β d'une figure F de α possède une aire qui s'obtient en multipliant l'aire de F par $\cos(t)$:

$$\sigma(F') = \sigma(F) \cdot \cos(t).$$

Indication. La technique utilisée pour obtenir l'aire du disque peut être utile.

Exercice 2. Relativement à un repère orthonormé on se donne un point A dont les coordonnées sont $(a; b; c)$. Exprime la distance entre l'origine O et le point A.

Remarque. Un repère orthonormé est un système d'axes *ortho*gonaux deux à deux, et dont la graduation est de mesure 1 (*normé*) dans chaque direction.

Exercice 3. Le cube. On considère le cube dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ (il y a 8 sommets, et chaque sommet est donné par ses trois coordonnées qui valent chacune 1 ou -1).

(a) Représente ce cube sur du papier quadrillé en perspective cavalière.

(b) Quelle est la surface de chacune des faces du cube et quelle est la surface totale du cube ?

(c) Détermine l'angle entre des plans contenant deux faces distinctes.

Exercice 4. L'octaèdre. Les centres des faces d'un cube sont les sommets d'un solide appelé octaèdre régulier.

(a) Représente l'octaèdre régulier sur du papier quadrillé en perspective cavalière.

(b) Explique pourquoi ses faces sont des triangles équilatéraux.

(c) Calcule la surface de chacune des faces et la surface totale de l'octaèdre.

(d) Détermine les angles et les longueurs des côtés d'un triangle dont les sommets sont l'origine $(0;0;0)$, un sommet de l'octaèdre (disons $(0;0;1)$) et le milieu d'un côté opposé dans l'une des faces de l'octaèdre (disons celles du côté dont les sommets sont $(1;0;0)$ et $(0;1;0)$).

(e) Détermine l'angle entre des plans contenant deux faces distinctes.

Exercice 5. Soit P un point de l'espace et α un plan. Démontre que pour tout point point A du plan α, la distance $\overline{PA}$ est plus longue (ou égale) que la distance entre P et sa projection orthogonale sur α. Ceci justifie notre définition de distance entre un point et un plan.

Indication. Utilise le Théorème de Pythagore ou d'autres propriétés connues des triangles rectangles.

Exercice 6. On considère les quatre points dont les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ sont $(1;1;1)$, $(0;0;1)$, $(0;1;0)$ et $(1;0;0)$.

(a) Calcule la distance entre chaque paire de points.

(b) Dessine (à la règle et sur du papier quadrillé) en perspective cavalière les quatre points données et les six segments reliant chaque sommet à chacun des trois autres sommets.

(c) Sais-tu comment s'appelle cette figure ? Les faces sont des triangles bien particuliers. Quelle particularité ont-ils ?

Exercice 7. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

(a) Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de deux points donnés est un plan.

(b) Soit $r > 0$. Le lieu géométrique des points de l'espace situés à la distance r d'un point donné est un cylindre.

(c) Soit $r > 0$. Le lieu géométrique des points de l'espace situés à la distance r d'une droite donnée est un cylindre.

(d) Dans l'espace deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles.

(e) Dans l'espace deux plans qui ne se coupent pas sont parallèles.

$\ast$ **Exercice 8. La caractéristique d'Euler.** La caractéristique d'Euler d'un polyèdre est $F - A + S$, où F est le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets.

(a) Calcule la caractéristique d'Euler des cinq solides platoniciens. Calcule A, F et S dans chaque cas.

(b) Dessine le développement de la surface de ces cinq polyèdres.

(c) On considère le polyèdre obtenu à partir d'un cube découpé en 27 petits cubes de côté $1/3$ duquel on enlève le cube central. Calcule la caractéristique d'Euler de ce polyèdre.

$\ast$ **Exercice 9.** Comme Euclide en 300 av. J.-C., montre qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers que les polyèdres platoniciens.

Indication. Considère un sommet d'un polyèdre régulier et les faces qui le touchent ; en coupant le polyèdre le long d'une arête, "aplatis" les faces du polyèdre autour de ce sommet dans un plan. Utilise que ces faces sont toutes des polygones réguliers du même type et que le polyèdre est convexe pour énumérer tous les arrangements possibles autour de ce sommet.

Exercice 10. Un solide est *convexe* si pour toute paire de points A et B du solide, le segment $[AB]$ entier est contenu dans le solide. L'*enveloppe convexe* d'un ensemble E de points est le plus petit ensemble convexe qui contient tous les points de E. Par exemple, l'enveloppe convexe de 4 points non coplanaires de l'espace est un tétraèdre.

Quel polyèdre obtient-on si l'on considère l'enveloppe convexe des milieux des douze faces du dodécaèdre régulier ? Et si l'on considère l'enveloppe convexe des milieux des 20 faces de l'icosaèdre régulier ? Et si l'on considère l'enveloppe convexe des milieux des quatre faces du tétraèdre régulier ?