
Test 1 - Probabilités et statistiques

29.09.21

Nom: _____ Prénom: _____

Le test dure 90 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée. Justifiez tous vos calculs.

Exercice 1. (*8 points*)

Julien souhaite inviter des amis à souper chez lui. Etant donné la taille de son appartement, il va devoir choisir 6 personnes parmi 5 femmes et 4 hommes.

- Combien y-a-t-il de possibilités pour Julien d'inviter 6 personnes s'il n'y a aucune restriction ?
- Combien y-a-t-il de possibilités pour Julien d'inviter 6 personnes s'il ne peut pas recevoir Anne et Catherine ensemble ?
- Combien y-a-t-il de possibilités pour Julien d'inviter exactement 3 femmes et 3 hommes, s'il ne peut pas recevoir Anne et Quentin ensemble ?
- Quelle est la probabilité que parmi les 6 personnes invitées il y ait au moins 3 femmes ?

Exercice 2. (*12 points*)

On lance deux dés à 6 faces. On considère la variable aléatoire X qui représente la somme des résultats des deux dés et la variable aléatoire Y qui compte le nombre de faces avec le numéro "6" obtenues.

- Déterminer les valeurs possibles pour X et pour Y , ainsi que les probabilités associées à chaque valeur.
- Déterminer l'espérance et la variance des variables X et Y .
- Déterminer la corrélation de X et Y .
- Est-ce qu'on pourrait approximer la variable Y en fonction de la variable X ? Justifier.

Exercice 3. (*4 points*)

Démontrer

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$$

Exercice 4. (1 points)

De combien de façons peut-on distribuer 22 canettes de soda à quatre personnes (chaque personne peut ne pas recevoir de canettes) ?

Exercice 5. (8 points)

En 2012, 55% des candidats se présentant pour la première fois à l'examen du permis de conduire théorique étaient des hommes. Seuls 32% des hommes et 52% des femmes ont réussi cet examen du premier coup. On choisit au hasard une personne parmi les candidats.

- a) Montrer que la probabilité que la personne ait réussi est de 41%.
- b) Sachant que la personne a réussi son examen, quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

Lorsqu'un candidat ayant échoué à sa première tentative se présente une deuxième fois à l'examen, sa probabilité de réussite passe alors de 41% à 60% et elle grimpe à 70% lors de la troisième tentative.

- c) Quel est alors le taux de réussite après trois tentatives au maximum ?

Exercice 6. (5 points)

Chaque étudiant d'un gymnase reçoit en début d'année scolaire un code informatique composé de 4 lettres minuscules (choisies parmi les 20 consonnes et 6 voyelles de notre alphabet), suivi de 4 chiffres. Le code peut contenir plusieurs fois une même lettre ou un même chiffre, comme par exemple le code abad0225.

- a) Combien existe-t-il de codes différents ?
- b) Combien existe-t-il de codes différents dont les 4 lettres sont identiques et les 4 chiffres distincts ?
- c) Combien existe-t-il de codes différents dont les 4 lettres sont distinctes avec pour première lettre une consonne et pour deuxième lettre une voyelle ?

Exercice 7. (5 points)

Loi de De Morgan. Soient E_1, \dots, E_n des événements. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^n E_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c$$