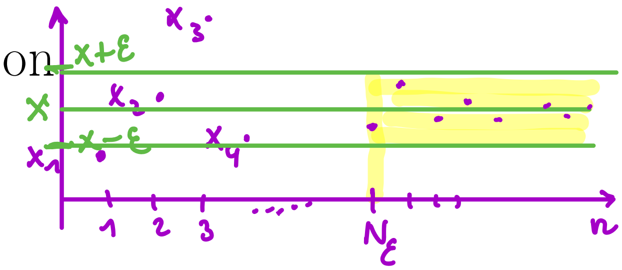
I. Dérivation



Dans ce module d'analyse, notre premier but est d'étudier plus finement le graphe des fonctions réelles. Vous avez déjà parlé de continuité et nous reviendrons brièvement là-dessus pour nous rafraîchir les idées, mais nous voudrons ensuite construire des outils qui nous permettront d'analyser la croissance et la concavité. Il nous faudra quelques semaines pour y arriver...

Une suite (x_n) $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ t.q. $n > N$ alors $|x_n - x| < \varepsilon$

1 Rappels

Pour définir la limite d'une suite de nombres réels (x_n), vous avez dû modéliser la notion d'*arbitrairement proche* en introduisant un nombre ε (réel, positif). Un nombre x est alors la limite de la suite si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier N tel que $|x - x_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. En d'autres termes, la différence entre les termes de la suite et la limite s'amenuise à mesure que l'on avance dans la suite.

Exemple 1.1. Calculons la limite de la suite $x_n = \dfrac{\cos\left(\sqrt[3]{n+1}\right)}{\sqrt[4]{n^3+1}}$.
Avant de commencer à faire des calculs, nous remarquons que cette expression est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, le cosinus d'un nombre réel est toujours compris entre -1 et 1, si bien que

$$|x_n| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}.$$

Notre intuition nous dit que ceci tend vers zéro. Formalisons-le avec des epsilons. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons pour N la partie entière de $\sqrt[3]{\varepsilon^{-4} - 1} + 1$.

Brouillon :

On veut $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} < \varepsilon$

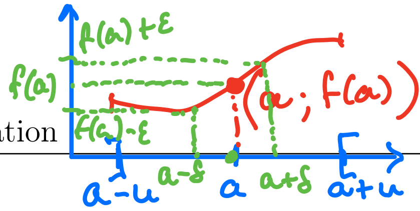
$(\ )^4$ $\iff \dfrac{1}{n^3+1} < \varepsilon^4$

$\iff \dfrac{1}{\varepsilon^4} < n^3 + 1$

$\iff \sqrt[3]{\dfrac{1}{\varepsilon^4} - 1} < n$

Alors pour $N > \sqrt[3]{\varepsilon^{-4} - 1}$, $\forall n > N$ on a $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$

ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$



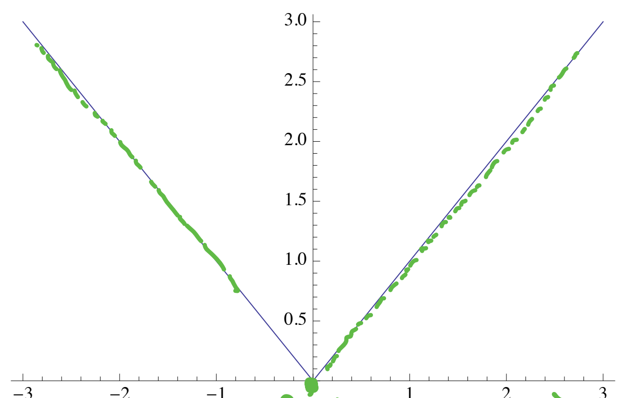
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ t.q. (*)...

Vous avez développé des méthodes qui permettent d'éviter l'usage de la définition et nous les rencontrerons à nouveau dans ce chapitre. Mais révisons d'abord la notion de continuité. Nous étudions le graphe d'une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et nous nous trouvons par conséquent dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour approcher un point du plan, il faut maintenant modéliser la notion d'arbitrairement proche à l'aide de deux nombres ε et δ, arbitrairement petits, qui décrivent ce qui se passe sur chacun des deux axes. Ainsi, f est continue au point a s'il existe un intervalle $]a-u, a+u[$ sur lequel f est définie et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \geq \delta > 0$ tel que

$$\text{...}\ (*) \qquad \underline{0 < |x-a| < \delta} \implies \underline{|f(x) - f(a)|} < \varepsilon$$

En d'autres termes, les valeurs $f(x)$ s'approchent autant qu'on veut de $f(a)$ si x s'approche suffisamment de a...

Exemple 1.2. Etudions la fonction $x \mapsto |x|$. Est-elle continue en zéro ? On remarque d'abord que le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$, si bien que le nombre u ci-dessus n'a pas d'importance.



$f(0) = 0$ à montrer : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

La valeur de la fonction en 0 est 0, si bien que nous devons montrer que $|x|$ s'approche de zéro à mesure que x s'approche de zéro. C'est bien le cas et nous formalisons cela avec des ε et des δ. Pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta =$

Brouillon :

On veut $\underbrace{|f(x) - f(0)|}_{||x| - 0| = ||x|| = |x|} < \varepsilon$ si $|x - 0| < \delta$

Donc on veut $|x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon$

On peut choisir $\delta = \varepsilon$

2 La dérivée

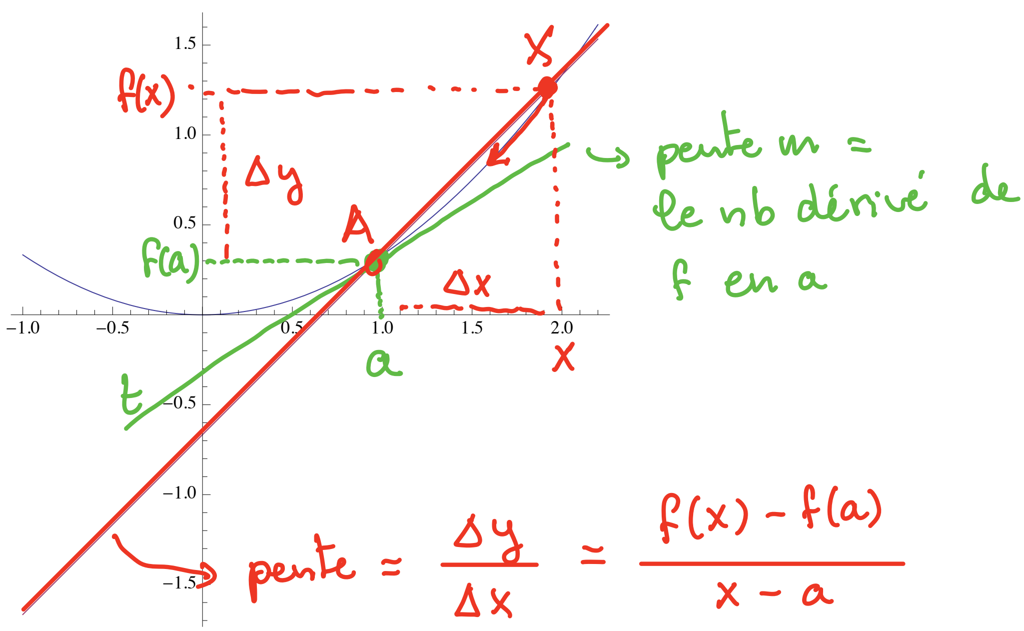
Nous savons que la notion de continuité modélise le fait de pouvoir tracer le graphe d'une fonction sans lever le crayon. Intuitivement, il est clair que certains graphes sont plus agréables à tracer que d'autres. Une fonction affine, sinusoïdale ou quadratique est "aisée" à tracer, alors qu'une ligne polygonale brisée (comme le graphe de la valeur absolue que nous venons de rencontrer) se trace avec des "à-coups". On décide de mesurer cela en observant les droites tangentes au graphe de la fonction.

Définition 2.1. version géométrique. Soit f une fonction réelle définie au voisinage du point a. La *dérivée* de f en a est la pente de la tangente au graphe de la fonction f au point $(a; f(a))$, pour autant que cette tangente existe.

Exemple 2.2. La fonction $x \mapsto |x|$ $f(x) = |x|$ n'a pas de dérivée en $x=0$

Par contre, sa dérivée vaut 1 lorsque $x > 0$ et -1 lorsque $x < 0$.

Pour pouvoir travailler avec cette notion de dérivée, nous avons besoin d'une définition analytique. On ne peut pas tracer la tangente au graphe et mesurer la pente à la règle ! Choisissons donc un point x pas trop éloigné de a et traçons la droite du plan passant par les points $(a; f(a))$ et $(x; f(x))$.



La pente de cette droite vaut $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Lorsque x tend vers a, la secante (AX) tend vers la tangente t

Définition 2.3. Soit f une fonction réelle définie au voisinage d'un point a. Alors ~~la *dérivée*~~ le nombre dérivé de f en a, si ~~elle~~ il existe, est donnée par

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

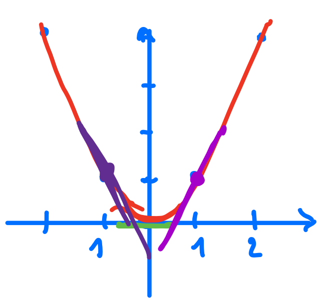
Définition équivalente : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemple 2.4. Considérons la fonction $f(x) = 1000$. Nous voulons calculer la dérivée $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1000 - 1000}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0 \qquad \text{ouf !}$$

Exemple 2.5. Considérons la fonction $f(x) = x^2$. Nous voulons calculer la dérivée $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.



$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x + a)\cancel{(x - a)}}{\cancel{x - a}} = 2a$$

$$\Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0 = \underline{0}$$

$$f'(1) = \underline{2} \qquad f'(-1) = \underline{-2}$$

Exemple 2.6. Considérons la fonction $f(x) = \sin x$. Nous voulons calculer la dérivée $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$. Rappelons que la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Utilisons la formule trigonométrique de la différence de deux sinus $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a}$$

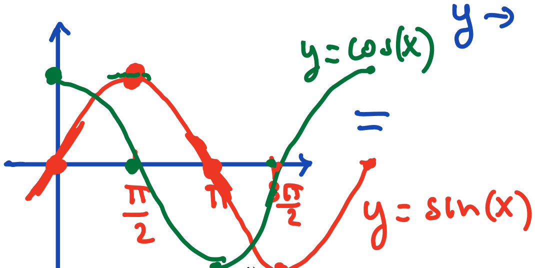
Le produit des limites est égal à la limite du produit, lorsque ces limites existent. On peut donc écrire

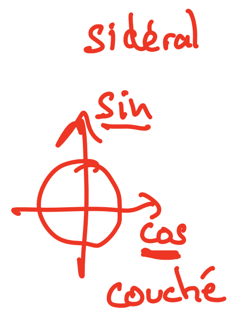
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos a$$

$$y = \frac{x-a}{2} \qquad = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \cos a$$

$$= 1 \cdot \cos a = \cos a$$





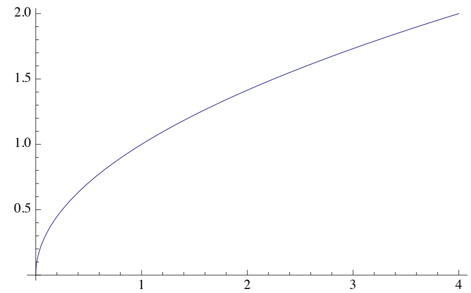
Soit $D(f') \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble des points où la dérivée de f existe. La fonction $f' : D(f') \to \mathbb{R}$ qui associe à tout point $x \in D(f')$ le nombre $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* ou *dérivée* de f, pour autant que $D(f')$ soit non vide.

Exemple 2.7. si $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

si $g(x) = \sin(x)$, $g'(x) = \cos(x)$

On note aussi $(x^2)' = 2x$ ou $(\sin(x))' = \cos(x)$

Remarque 2.8. On étend la notion de dérivée de la même façon qu'on a étendu la notion de limite. On peut ainsi parler de dérivée infinie lorsque la tangente au graphe est verticale. On peut aussi parler de dérivée à droite et dérivée à gauche. Considérons par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.



Son domaine de définition est $\mathbb{R}_+$. Calculons la dérivée à droite en zéro.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Nous verrons d'autres exemples en exercice.

Pour terminer avec les généralités, nous démontrons que la notion de dérivabilité est plus forte que celle de continuité. En particulier il n'y a pas de sens à vouloir calculer la dérivée d'une fonction qui n'est pas continue. Géométriquement, il est clair que nous n'arriverons pas à tracer la tangente en un point où la fonction n'est pas continue !

Proposition 2.9. *Une fonction dérivable en un point a est continue en ce point.*

Démonstration. f dérivable en a $\Rightarrow$ $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe.

le dénominateur tend vers 0,
donc le numérateur doit aussi tendre vers 0 pour que $f'(a)$ existe.

$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)-f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\Rightarrow$ f est continue en a. □

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Comme pour les limites, l'une des méthodes les plus puissantes pour calculer la dérivée de fonctions "compliquées" est de les décomposer en morceaux plus simples. Il faut donc apprendre à calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'une composition, etc. Le premier résultat dit que la dérivation est une opération linéaire.

Théorème 3.1. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est aussi dérivable en a et*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

Démonstration.

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(a) - \beta g(a)}{x-a}$$

linéarité de la limite

$$\overset{(*)}{=} \alpha \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \beta \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

□

Exemple 3.2. Considérons la fonction $h(x) = \pi x^2 + 1000$. On calcule la dérivée avec la formule précédente et à l'aide des exemples de la section précédente. On obtient

$$h'(x) = (\pi x^2)' + (1000)' = \pi (x^2)' + (1000)'$$

$$= \pi \cdot 2x + 0 = 2\pi x$$

Vous démontrerez le résultat suivant en exercice. Il permet de calculer la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.

Théorème 3.3. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a. Alors $f \cdot g$ est aussi dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

$$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Exemple 3.4. Considérons la fonction $f(x) = x^2 \sin x$. Alors

$$f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

$u = x^2$ $\quad u' = 2x$

$v = \sin x$ $\quad v' = \cos x$

Nous passons maintenant au quotient de fonctions dérivables.

Théorème 3.5. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a. Supposons que $g(x) \neq 0$ au voisinage de a. Alors $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

$f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x)$

$g(x) = x^2 \to g'(x) = 2x$

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$h'(x) \; \frac{\cos(x) \cdot x^{\cancel{2}} - \sin(x) \cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{x\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3}$$

Démonstration. Ecrivons la différence des quotients $\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)$ en mettant au même dénominateur, puis en enlevant et ajoutant $f(a)g(a)$ au numérateur :

$$\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)\cdot g(a)}$$

$$= g(a)\,\frac{f(x)-f(a)}{g(x)\cdot g(a)} + f(a)\,\frac{g(a)-g(x)}{g(x)\cdot g(a)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{g(a)}{\underbrace{g(x)}_{\to g(a)}\cdot g(a)}\,\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} + \frac{f(a)}{\underbrace{g(x)}_{\to g(a)}\cdot g(a)}\,\underbrace{\frac{g(a)-g(x)}{x-a}}_{\to -g'(a)}\right)$$

$$= \frac{g(a)}{g(a)^2}\cdot f'(a) - \frac{f(a)}{g(a)^2}\cdot g'(a)$$

On voit que cette expression est égale à

$$\frac{g(a)\cdot f'(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}$$

□

Nous en avons terminé avec les opérations élémentaires et terminons cette partie avec l'inverse d'une fonction dérivable.

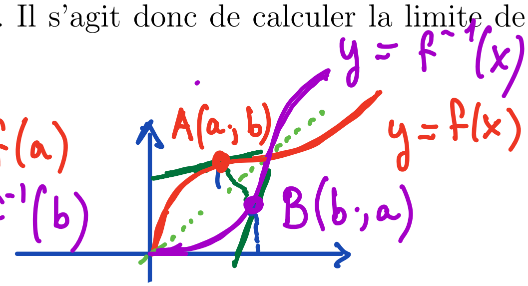
Théorème 3.6. *Soit f une fonction réelle bijective sur un intervalle $]a-u, a+u[$ et dérivable en a. Supposons que $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction inverse f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Démonstration. Puisque la fonction f est bijective au voisinage de a, on sait que la fonction inverse de f existe et est définie au voisinage de $b = f(a)$. Il s'agit donc de calculer la limite de

$b = f(a)$

$a = f^{-1}(b)$



$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$ lorsque y tend vers b. La bijectivité de f permet à nouveau d'écrire tout y au voisinage de b comme $y = f(x)$ pour un unique nombre réel x compris entre $a - u$ et $a + u$. Ainsi,

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)}$$

(*) car f continue, donc si $x \to a$, $f(x) \to f(a)$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

on a supposé que $f'(a) \neq 0$

□

Géométriquement, on comprend bien que la pente de la tangente en un point du graphe de la fonction inverse est l'inverse de la pente $f'(a)$ puisque le graphe de la fonction inverse est obtenu par symétrie autour de la diagonale.

Exemple 3.7. Considérons la fonction $f(x) = \sin x$. La fonction inverse est $\arcsin x$ et nous voulons calculer la dérivée en un point b de l'intervalle $] - 1, 1[$.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\cos(a)}$$ où $b = \sin(a) \iff a = \arcsin(b)$

Le problème est qu'on veut une fonction de b et non de a

$\sqrt{1 - \sin^2} = \cos$

$$\cos(a) = \cos(\arcsin(b)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(b))}$$

$$= \sqrt{1 - b^2}$$

$$\Longrightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \qquad \Longrightarrow (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$