Série 6

Pour le 28 septembre 2022

Exercice 1

Calcule, à l'aide de la définition, la dérivée des fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. Plus généralement, calcule la dérivée de la fonction $h(x) = x^n$ pour tout entier $n \geq 0$. Tu peux effectuer une récurrence sur n et utiliser la formule de multiplication que tu démontreras dans les exercices théoriques.

Exercice 2

Calcule à l'aide de la définition la dérivée de la fonction $f(x) = \cos x$. Calcule ensuite la dérivée des fonctions $g(x) = \tan x$ et $h(x) = \cot x$. Tu peux utiliser pour cela la formule de la dérivée d'un quotient. Indique dans chaque cas le domaine de définition de la fonction et de sa dérivée.

Exercice 3

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable qui atteint son minimum en un point $0 \leq u \leq 1$, alors la dérivée en ce point est nulle.

b) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable qui atteint son minimum en un point $0 \leq u \leq 1$, alors la dérivée en ce point n'est jamais nulle.

c) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui atteint son minimum en un point $0 \leq u \leq 1$, alors la dérivée en ce point existe.

d) Soit d une droite du plan non verticale passant par le point $(0,0)$. Il existe une fonction réelle f avec $f(0) = 0$ telle que la tangente au graphe de cette fonction au point $(0,0)$ est d.

e) Même question si la droite est verticale.

f) Une fonction continue est dérivable. Facultatif : Une fonction dérivable est continue.

Exercice 4

Calcule avec ta méthode favorite la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 10x - 23$ et $g(x) = x^9 + x^8 + x + 1$;

b) $f(t) = \dfrac{1}{t}$ et $g(t) = \dfrac{2}{t^2}$;

c) $f(y) = \sqrt{y}$ et $g(y) = \sqrt[3]{y}$;

d) $f(u) = (u+5)^2$ et $g(u) = (u+5)^2(u-3)$;

e) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-5}$ et $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

f) $f(x) = 2x^3 + \dfrac{5}{x^7}$ et $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{2 - x^2}$

Exercice 5

Construis une fonction dont la dérivée est x. Construis ensuite une fonction dont la dérivée est $|x|$. On conclut de cet exemple qu'une fonction peut être dérivable en un point sans pour autant que la fonction dérivée le soit.

Exercice 6

Calcule dans chacun des cas suivants l'angle entre les deux courbes données en leurs points d'intersection. Utilise ta machine à calculer si nécessaire !

a) $y = x^2$ et $y = x^3$;

b) $y = x^2 - 2x$ et $y = \dfrac{1}{2}x$;

c) $y = \sin x$ et $y = \cos x$.

Note : L'angle entre deux courbes est l'angle aigu des tangentes aux courbes en leur point d'intersection.

Rappel : L'angle α entre deux droites $y = m_1x + h_1$ et $y = m_2x + h_2$ est donné par

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|.$$

Exercice 7

Pour quelles valeurs de a et b la courbe d'équation $y = x^3 + ax^2 + bx$ admet-elle une tangente horizontale au point $(1;1)$?

Exercice 8

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$. Détermine la valeur du paramètre m pour que la tangente à la courbe au point où elle coupe l'axe Oy soit parallèle à la droite d'équation $20x + 9y = 0$.

Exercices théoriques

Exercice 9

Démontre la formule de la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.

Exercice 10

Soit f une fonction réelle dérivable. Démontre les affirmations suivantes :

a) Si f est paire, alors la dérivée f' est impaire.

b) Si f est impaire, alors la dérivée f' est paire.

c) Si f est périodique, alors f' aussi est périodique.