Série 7

Pour le 5 octobre 2022

Exercice 1

Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)^3$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 4}$

c) $h(x) = \left(\dfrac{x-1}{3x+2}\right)^2$

d) $l(x) = \dfrac{(2x-1)^3}{(5x+1)^4}$

e) $m(x) = 3\sqrt{2\sin x \cos x}$

f) $u(x) = (1-x)(x-3)^4$

g) $v(x) = (x + x^2)^{-5}$

h) $w(x) = \dfrac{(3x+1)^2}{(x+2)^3}$

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$.

a) Détermine son domaine de définition.

b) Montre que l'on peut prolonger f par continuité sur tout $\mathbb{R}$.

c) Calcule la dérivée $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

d) Calcule $f'(0)$.

e) Montre que la dérivée n'est pas continue en zéro.

Exercice 3

On considère la fonction $f : [-1; 2] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$. Trouve les extrema locaux de cette fonction. Commence par trouver tous les candidats possibles, puis essaie de tracer une esquisse du graphe de f.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre. On considère la famille de paraboles d'équation $ax^2 + 5x - 7$. Montre qu'elles sont *toutes* tangentes entre elles. En quel point ?

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Une fonction dont la dérivée est négative est décroissante.

b) Si une fonction admet un point où la dérivée n'existe pas, alors ce point est un extremum local.

c) Les seules fonctions f dont la dérivée est $x + 1$ sont de la forme $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$, où c est une constante.

d) Les seules fonctions f dont la dérivée est $\sin x$ sont de la forme $f(x) = \cos x + c$, où c est une constante.

e) Si une fonction dérivable est croissante pour $x < 0$ et décroissante pour $x > 0$, alors $f'(0) = 0$.

Exercice 6

Calcule les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\tan x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x^2 + 3x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x - \sqrt{x^2 - x}$;

Indication. Pose $h = \frac{1}{x}$ et transforme la limite ci-dessus en une limite lorsque h tend vers zéro.

Exercice 7

a) Montre que la fonction $g(x) = x - \tan x$ est strictement décroissante entre 0 et $\pi/2$.

b) Montre que la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ est strictement décroissante entre 0 et $\pi/2$.

c) Déduis de la partie précédente que si $0 < a < b < \pi/2$, alors $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin a}{\sin b}$.

d) Déduis aussi que si $0 < a < b < \pi/2$, alors $\dfrac{\sin a}{\sin b} < \dfrac{\pi a}{2b}$.

Indication. Montre que $\dfrac{b}{\sin b} < \dfrac{\pi}{2}$ et utilise le fait que $0 < \sin a < a$.

Exercices théoriques

Exercice 8

Le Théorème des accroissements finis. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a, b[$. Montre qu'il existe alors un point $a < c < b$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
Indication. On pose $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Montre que $g(x)$ satisfait à toutes les hypothèses nécessaires pour pouvoir appliquer le Théorème de Rolle.

Exercice 9

Démontre que tout polynôme $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré n admet au plus n racines réelles.
Indication. Utilise le théorème de Rolle pour montrer d'abord que si une fonction réelle f s'annule $k + 1$ fois, alors la dérivée f' s'annule au moins k fois, puis fais un raisonnement par l'absurde.

Exercice 10

Soit n un entier naturel *pair* et $a, b \in \mathbb{R}$. Montre que la fonction $f(x) = x^n + ax + b$ s'annule au plus en deux points (étudie la dérivée et applique le Théorème de Rolle !).