Analyse 1

Sections MX - SC - CGC

EPFL - Automne 2022

Professeur : Lénaïc Chizat

- But du cours
- Organisation :
  - 1 ECTS ≃ 1^h30 travail / semaine

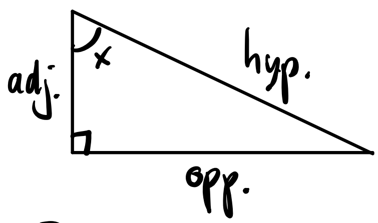
  → 6 ECTS → 9^h travail/semaine $(\underbrace{3^h}_{\text{cours}} + \underbrace{1^h30}_{\text{exercices}} + \underbrace{4^h30}_{\text{perso}})$
  - série d'exercices :
    - libérée le jeudi après-midi
    - séance le lundi matin
    - correction libérée le lundi après-midi
  - 24 assistants
  - séances de soutien : du lundi au jeudi de 17^h30 à 19^h
  - Examen : QCM + questions ouvertes

    (pas de document ni calculette).

Prélude : (quelques rappels pour la série 1)

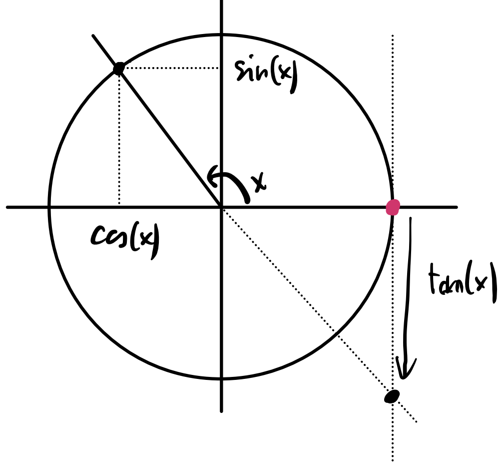
- Fonctions trigonométriques :

Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$



$$\begin{cases} \sin(x) = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}} \\ \cos(x) = \dfrac{\text{adj.}}{\text{hyp.}} \\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\text{opp.}}{\text{adj.}} \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$:



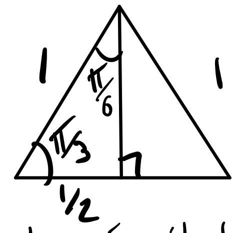
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

À connaître :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0

Retrouver les valeurs manquantes à l'aide des triangles suivants :

triangle rectangle isocèle



triangle équilatéral

(se souvenir que $\sqrt{2} \simeq 1,414\ldots$ $\sqrt{3} \simeq 1,732\ldots$)

Exponentielle et Logarithme

Exp : l'unique solution f de $\begin{cases} f'(x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

"Vraie" definition : $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Notion vue plus tard)

$$= \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \quad \text{(de même)}$$

En particulier : $\exp(1) = e = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ "Constante d'Euler"

$\simeq 2,712\ldots$

Log : fonction réciproque de l'exponentielle c'est à dire :

($\text{Log}(x)$ = logarithme Népérien ; notation alternative $\ln(x)$, $\log(x)$)

$$\begin{cases} \text{Log}(\exp(x)) = x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \exp(\text{Log}(u)) = u & \text{pour tout } u > 0 \end{cases}$$

Généralisation : pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

- On définit $a^x \underbrace{:=}_{\text{est égal à, par définition}} \exp(x\,\text{Log}(a)) = e^{x\,\text{Log}(a)}$

- Pour $a > 0$ fixé, la réciproque de a^x est

$\text{Log}_a(x) = \frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)}$ (vérifier à partir de la propriété de réciprocité).

On l'appelle le "logarithme en base a".

Règles de calcul ($a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$)

$$a^0 = 1$$
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x \cdot b^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-x}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Pour n entier, on a $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$ (aussi valide pour a négatif)

Racine n-ième, $\sqrt[n]{a} := a^{1/n}$ l'unique nombre positif tel que $(a^{1/n})^n = a$.

Règles de calcul du logarithme ($a > 0$, $x, y \cancel{\in \mathbb{R}}$)

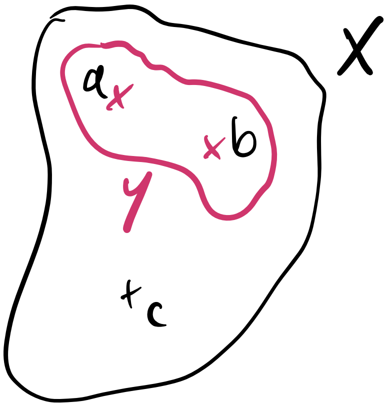
$x, y > 0$

$$\log_a(1) = 0$$
$$\log_a(a) = 1$$
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(1/x) = -\log_a(x)$$
$$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^b) = b \log_a(x) \quad (\text{pour } b \in \mathbb{R}).$$

Chapitre 0. Notions de base

0.1 Ensembles

Collection d'objets (non ordonnée, sans répétition)



$$X = \{a, b, c\}$$

$$Y = \{x \in X \; ; \; x \text{ est de couleur rouge}\}$$
$$= \{a, b\}$$

0.1.1 Notations

$\in$ { appartient à / est élément de — $a \in X$

$\notin$ { n'appartient pas à / n'est pas élément de — $c \notin Y$

$\subset$ { est un sous-ensemble de / est inclus dans — $Y \subset X$, $\{a\} \subset Y$

$\not\subset$ n'est pas inclus dans — $X \not\subset Y$

$=$ égalité (ont les mêmes éléments) — $Y = \{a, b\}$

$\emptyset \equiv \{\}$ ensemble vide

↳ $\equiv$ indique des notations équivalentes

Nota bene : $\emptyset \subset X$
$X \subset X$ pour tout ensemble X

Définition: $\mathcal{P}(X) :=$ l'ensemble des sous-ensembles de X
aussi appelé "ensemble des parties de X"
ou "ensemble puissance de X"

Exemple: $X = \{a, b, c\}$ (3 éléments)

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

($8 = 2 \times 2 \times 2$ éléments)

Remarque: $\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b, a, b\}$
$\{a\} \subset X$ mais $\underbrace{\{a\}}_{\text{appelé le singleton qui contient } a.} \in \mathcal{P}(X)$

Pour aller plus loin : question de Russel à Frege :

$X = \{a \underset{\text{"tel que"}}{:} a \notin a\}$ est-ce que $X \in X$?

cette définition de X ne peut pas être autorisée !

Si $X \in X$ alors $X \notin X$ contradiction
Si $X \notin X$ alors $X \in X$ contradiction
$\Rightarrow$ il faut construire les ensembles à partir d'ensembles déjà construits

(en particulier : "l'ensemble de tous les ensembles" n'est pas un objet mathématique autorisé.

0.1.2. Le produit cartésien

Soient X, Y, Z des ensembles

$$X \times Y = \{\underbrace{(x, y)}_{\text{un couple, l'ordre est important.}} : x \in X, y \in Y\}$$

Exemple : $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5\}$

$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$ (4 éléments)

⚠ $X \times Y \neq Y \times X$ (sauf si $X = Y$)

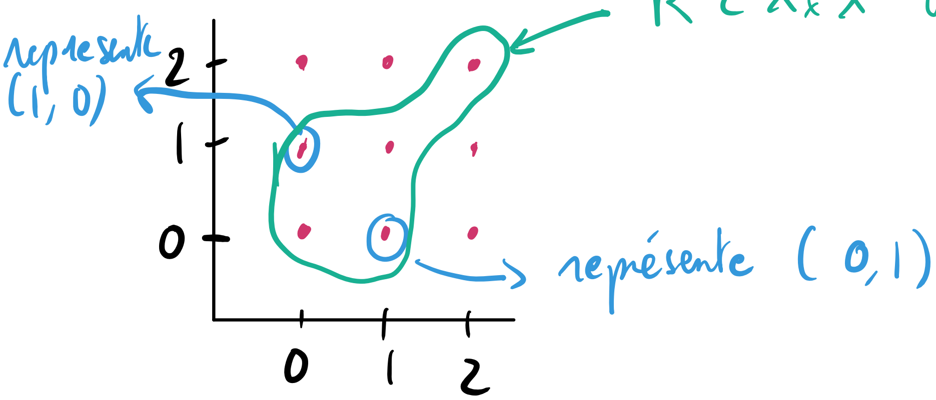
Plus généralement : $X \times Y \times Z = \{ \underbrace{(x, y, z)}_{\text{triplet}} : x \in X, y \in Y, z \in Z \}$

triplet (plus généralement on appelle $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet)

Définition (Relation). Soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation sur X.

Exemple : Soit $X = \{0, 1, 2\}$

$R \subset X \times X$ une relation sur X.



fin cours 22/09/22