Exercice 1. Notons h la hauteur du cône tronqué. En prolongeant le segment portant g et celui portant h, on obtient le cône non tronqué ayant H pour hauteur et G pour génératrice. Supposons $R \neq r$, par le théorème de Thalès, on calcule G : $\frac{R}{R-r} = \frac{G}{g}$ et donc $G = \frac{gR}{R-r}$.

Calcul long. Par le cours, le cône non tronqué a une aire de la surface latérale égale à $\pi R \frac{gR}{R-r}$. Le petit cône qu'il faut rajouter au cône tronqué de départ pour obtenir le cône non tronqué a une aire latérale de $\pi r(G-g) = \pi r\left(\frac{gR}{R-r} - g\right) = \pi r \frac{gR - gR + gr}{R-r} = \pi r \frac{gr}{R-r}$. Ainsi l'aire latérale du cône tronqué est la différence des deux aires que l'on vient de calculer :

$$\pi R \frac{gR}{R-r} - \pi r \frac{gr}{R-r} = \pi g \frac{R^2 - r^2}{R-r} = \pi g \frac{(R+r)(R-r)}{R-r} = \pi g(R+r).$$

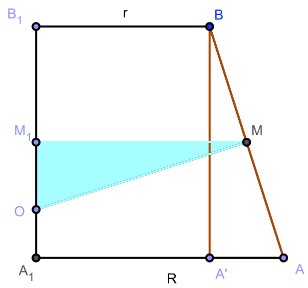
Si $R = r$, la surface latérale est un rectangle de côtés $2\pi r = 2\pi R = \pi(r+R)$ et g et donc l'aire vaut $\pi(r+R)g$.

Calcul court. La différence des surfaces latérales des cônes se calcule plus facilement comme suit.

$$\pi GR - \pi(G-g)r = \pi G(R-r) + \pi gr = \pi \frac{gR}{R-r}(R-r) + \pi gr = \pi gR + \pi gr = \pi g(R+r).$$

Exercice 2. Soit A' la projection orthogonale de B sur la droite AA_1 (voir la figure ci-dessous). Les triangles ΔOMM_1 et $\Delta ABA'$ sont semblables puisqu'il s'agit de triangles qui ont leurs côtés perpendiculaires deux à deux. Ainsi le rapport des longueurs des hypothénuses est égal au rapport des longueurs de deux cathètes correspondants : $\frac{\overline{OM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MM_1}}{\overline{A'B}}$ Comme $\overline{A'B} = \overline{A_1B_1}$ et $\overline{MM_1}$ est le rayon moyen de ce cône de révolution tronqué (par conséquent égal à $\frac{r+R}{2}$), avec le résultat de l'exercice précédent, l'aire latérale vaut

$$\pi(r+R)g = \pi(r+R)\overline{AB} = \pi(r+R)\frac{\overline{OM}}{\overline{MM_1}}\overline{A_1B_1} = 2\pi \cdot \overline{OM} \cdot \overline{A_1B_1}.$$



Exercice 3. L'aire de la sphère vaut $4\pi r^2$, celle du cylindre (vide) $2r \cdot 2\pi r = 4\pi r^2$ et celle des 4 disques vaut $4\pi r^2$. Ces 3 figures ont la même aire !

Exercice 4. Pour un angle d'un radian, le fuseau sphérique a une aire de $\frac{4\pi r^2}{2\pi} = 2r^2$ et donc pour α radians : $\alpha 2r^2$.

Exercice 5. Un cube de longueur a a un volume égal à a^3, tandis qu'un cube d'arrête λa a un volume égal à $\lambda^3 a^3$. Si a est le côté d'un polyèdre quelconque, alors le volume de ce polyèdre est fonction de a^3. Par exemple, vol(cube) $= a^3$, vol(tétraèdre) $= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, vol(octaèdre) $= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. Ainsi, lorsque l'on cherche le volume d'un polyèdre semblable de côté λa, il suffit de multiplier le résultat par λ^3 comme dans le cas du cube.

Exercice 6. Les faces sont des triangles équilatéraux de côté a. Par Pythagore, la hauteur d'un de ces triangles vaut $\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Considérons que le tétraèdre est posé sur une de ces faces. Notons O' la projection orthogonale du sommet du tétraèdre sur le sol. Comme la face posée sur le sol est un triangle équilatéral, la distance d'un sommet sur le sol à O' vaut les $\frac{2}{3}$ de la hauteur d'une face, c'est-à-dire $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Considérons un triangle rectangle dont une cathète est la hauteur du tétraèdre, h, l'hypoténuse est de longeur a et la dernière cathète est de longueur $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Par Pythagore, $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$. L'aire de la base du tétraèdre vaut $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ et donc le volume du prisme vaut, par le formule du volume d'une pyramide, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}a \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

Exercice 7.

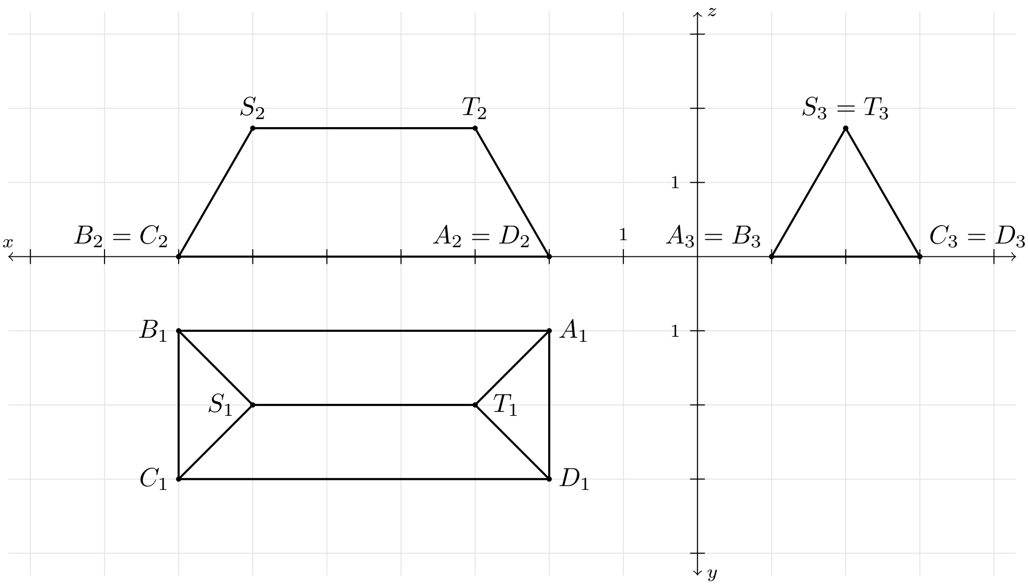
a) Calculons la hauteur d'une face triangulaire de la pyramide par Pythagore : $\sqrt{215^2 - 115^2} = \sqrt{33000} \cong 181.7$m. Ainsi, en projetant le sommet de la pyramide sur le sol on obtient un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{33000}$, une cathète 115 et la deuxième cathète est la hauteur de la pyramide. Alors par Pythagore la hauteur vaut $\sqrt{33000 - 115^2} = \sqrt{19775} \cong 140.6$ m.

b) Par trigonométrie, cet angle vaut $\arctan\left(\frac{140.6}{115}\right) \cong 50.7°$.

c) Cette aire vaut $4 \cdot 230 \cdot 181.7 \cdot \frac{1}{2} \cong 83563$ m^2.

d) Par la formule pour une pyramide, ce volume vaut $230^2 \cdot h \cdot \frac{1}{3} \cong 2479663$ m^3.

Exercice 8. On obtient les projections suivantes (la projection sur Oyz est bien un triangle équilatéral) :



Un plan vertical perpendiculaire à l'arête sommitale ST et passant par S intersecte le tas de sable selon un triangle équilatéral dont les côtés sont de longueur 2 mètres (voir la projection sur Oyz ci-dessus). Par Pythagore, la hauteur d'un tel triangle est

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ m},$$

qui est donc aussi la hauteur du tas de sable. Deux plans verticaux perpendiculaires à ST et passant par S et T partagent le tas en deux pyramides isométriques $SC'B'BC$ et $TA'D'DA$ (le plan par S intersecte AB en B' et CD en C' ; le plan par T intersecte AB en A' et CD en D') de hauteur h et de base rectangulaire, et un prisme droit à base triangulaire $C'B'S$ et de hauteur $\overline{ST}$.

Pyramide. Aire base : $\sigma(C'B'BC) = 2 \cdot 1 = 2$ m^2. Hauteur : $h = \sqrt{3}$ m.
Volume $= \frac{1}{3} \cdot \sigma(C'B'BC) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m^3.

Prisme. Aire base : $\sigma(C'B'S) = \frac{1}{2} \cdot \overline{C'B'} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ m^2. Hauteur : $\overline{ST} = 5 - 2 = 3$ m.
Volume $= \sigma(C'B'S) \cdot \overline{ST} = \sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ m^3.

Tas de sable. Volume $= 2 \cdot$ (Vol. Pyramide) + (Vol. Prisme) $= 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}+9\sqrt{3}}{3} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$ m^3.

Si H est la projection orthogonale de S sur le plan Oxy, on observe que le triangle BHS et droit en H et d'hypothénuse 2 m. On a $\overline{SH} = \sqrt{3}$ m et $\overline{HB} = \sqrt{2}$ m. Si $\alpha = \widehat{SBH}$, on a

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{SH}}{\overline{HB}} \quad \text{et donc} \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cong 50.7°.$$

En calculant $\overline{SB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{SH}^2} = \sqrt{5}$, on obtient aussi les expressions équivalentes :

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) = \cos^{-1}\left(\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right).$$

Exercice 9. Le volume consideré est alors celui d'une pyramide de base hexagonale et de hauteur h. Par Pythagore, $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Dans une série précédente, nous avons calculé l'aire d'un hexagone inscrit dans un cercle de rayon r : $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ et donc ici l'aire de l'hexagone vaut $\dfrac{27\sqrt{3}}{2} \cong 23.4$ m^2. Cette aire est la surface au sol dont dispose les Indiens. Le volume du tipi est celui d'une pyramide : $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 18\sqrt{3} \cong 31.2$ m^3

Exercice 10.

a) Les triangles $\triangle A'B'C'$ et $\triangle ABC$ sont semblables par le théorème de Thalès. Ainsi les arrêtes $[AC]$ et $[A'C']$ sont proportionnelle. En appliquant le théorème de Thalès à chaque faces on obtient la proportionalité des arrêtes $[AS]$ et $[AS']$ et de même pour toutes les arrêtes manquantes.

b) Le rapport λ est égal, par exemple, à la grandeur $\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$, comme $\overline{SA}$ est plus grand que $\overline{SA'}$, on a que $\lambda \in [0, 1]$ ($\lambda = 0$ si $H = h$ et $\lambda = 1$ si $h = 0$). Notons h' la hauteur de la petite pyramide, comme celle de la grande vaut H, on a que le rapport d'homothétie vaut $\lambda = \dfrac{h'}{H}$ et donc $h' = \lambda H$. Pour calculer σ' on multiplie la longueur d'un côté du $\triangle A'B'C'$ par sa hauteur. Ces deux longueurs peuvent être exprimées par des longueurs du triangle $\triangle ABC$ multipliées par λ et donc $\sigma' = \lambda^2\sigma$.

c) Le volume de la grande pyramide vaut $\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H$. Le volume de la petite vaut $\dfrac{1}{3}\cdot\sigma'\cdot h' = \lambda^3\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H$. Ainsi le volume de la pyramide tronquée est la différence de ces deux volumes, c'est-à-dire $\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H - \lambda^3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H = (1-\lambda^3)\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H$. Or on sait que la hauteur de la petite pyramide peut s'exprimer de deux façons différentes, $H - h$ ou λH, en égalant ces deux expressions, on obtient que $H = \dfrac{h}{1-\lambda}$. Ainsi le volume de la pyramide tronquée vaut

$$\frac{1-\lambda^3}{1-\lambda}\frac{1}{3}\cdot\sigma\cdot h = \frac{1}{3}\cdot(1+\lambda+\lambda^2)\cdot\sigma\cdot h.$$

d) Comme on a $\sigma' = \lambda^2\sigma$, on en déduit que $\sigma\sigma' = \lambda^2\sigma^2$. En prenant la racine carrée de cette expression on a le résultat.

e) $(1+\lambda+\lambda^2)\sigma = \sigma + \lambda\sigma + \lambda^2\sigma = \sigma + \sqrt{\sigma\sigma'} + \sigma'$.

f) On approche l'aire du petit cercle, πr^2, par une sucession de polygones d'aire σ' et l'aire du grand cercle, πR^2, par une sucession de polygones d'aire σ'. Ainsi la quantité $\sqrt{\sigma\sigma'}$ approche la quantité $\pi r R$. On approche le volume du cône tronqué par le volume de pyramides tronquées dont les bases sont des polygones dont le nombre de sommets augmente indéfiniment. Si l'aire des bases s'approche de l'aire des disques qui forment les bases du cône tronqué, les volumes des pyramides tronquées s'approchent du volume cherché.

g) $\mathrm{vol}(P) = \dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot 1 = \dfrac{4}{3}$, $\mathrm{vol}(P') = \dfrac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 1 = \dfrac{1}{3}$, ainsi la somme de ces deux volumes vaut $\dfrac{5}{3}$. Par la formule trouvée en 5) on a $\mathrm{vol}(T) = \dfrac{1}{3}\cdot(4+2+1)\cdot 1 = \dfrac{5+2}{3} = \dfrac{7}{3}$. On voit dans cet exemple que la somme des volumes des pyramides de bases correspondantes et de même hauteur est inférieur au véritable volume du prisme tronqué. Contrairement à ce que nous avons vu pour l'aire d'un "triangle tronqué" (c'est-à-dire un trapèze), la formule du volume d'une pyramide tronquée n'est pas donnée par la somme des volumes des pyramides de mêmes bases.