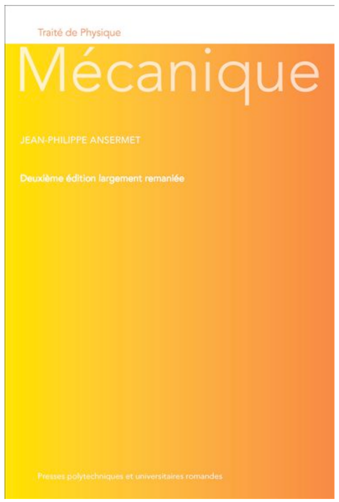
Oscillateurs harmoniques

Leçon 5.2

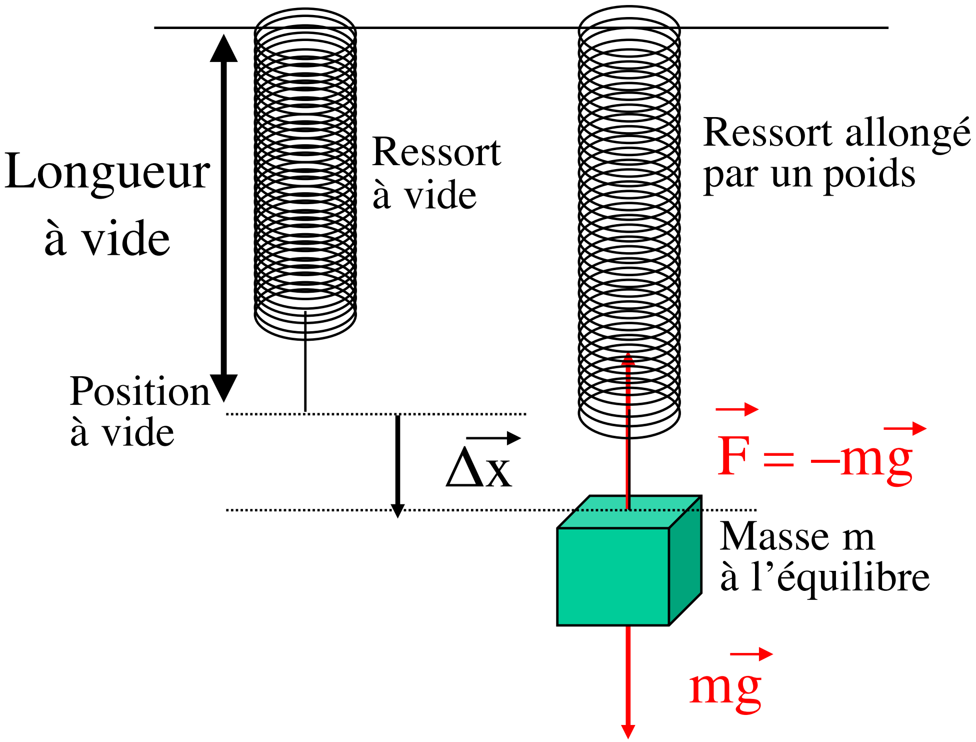
https://wiki.epfl.ch/mooc-mecanique/cours5



p 92, Section 2.5

Ressorts élastiques et Loi de Hooke

- **l'élongation** d'un ressort est proportionnelle à la force exercée



$$\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta x}$$

Force de rappel

Constante d'élasticité (raideur)

Elongation par rapport à longueur à vide

- Cette loi est un modèle valable pour de <u>petits</u> allongements
- Ce modèle est en fait <u>beaucoup plus général</u>: il s'applique à **tout mouvement de suffisamment faible amplitude autour d'une position d'équilibre**

Oscillateur harmonique

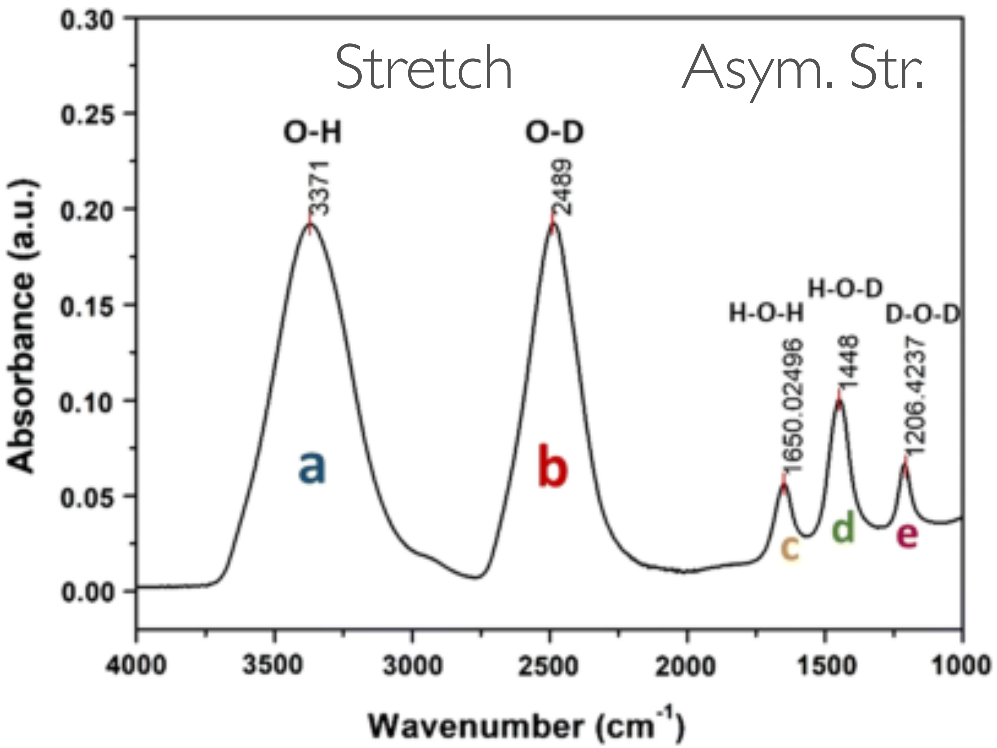
- Modèle simple, très général, valable pour tout système proche d'un état d'équilibre stable
  - Petites oscillations d'un pendule vertical,
  - Vibrations d'une membrane ou d'une corde tendue, d'un cristal (ex: balance de précision à quartz)
  - Vibrations des atomes entre eux au sein d'une molécule
  - Oscillateur électrique RLC
  - La lumière et les ondes électromagnétiques en général !

- Sert à définir une horloge: système physique dont les mouvements sont périodiques.
- Ex: crystal de quartz dans les montres; oscillation d'un électron dans un atome (horloges atomiques)

https://www.youtube.com/watch?v=WTmj_9VT5oE

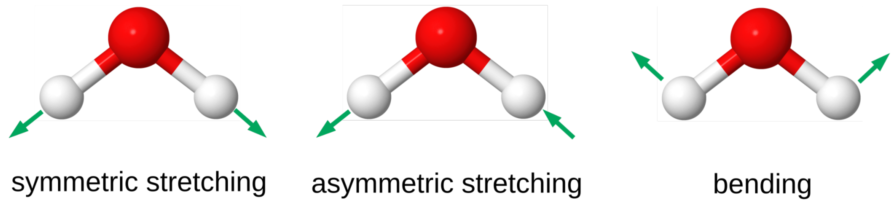
Vibrations moléculaire : spectroscopie Infrarouge

On mesure la transmission de lumière infrarouge en fonction de sa fréquence



Fréquence (cm^{-1})

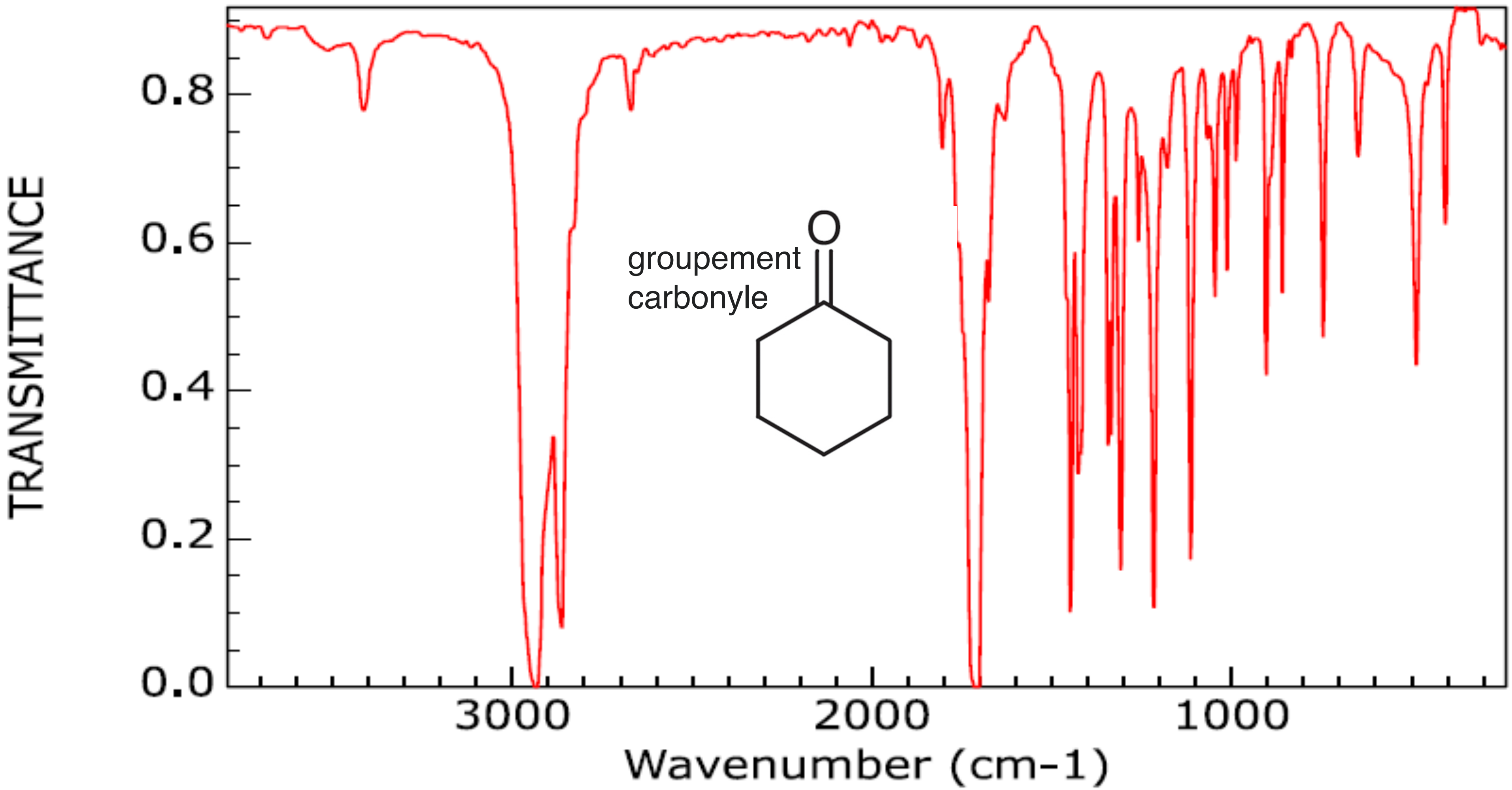
$100\ cm^{-1} = 3\ THz$



Exemple: molécule d'eau

Chaque pic d'absorption correspond à une **résonance** vibratoire de la molécule

Cyclohexanone
(cétone, précurseur du nylon)

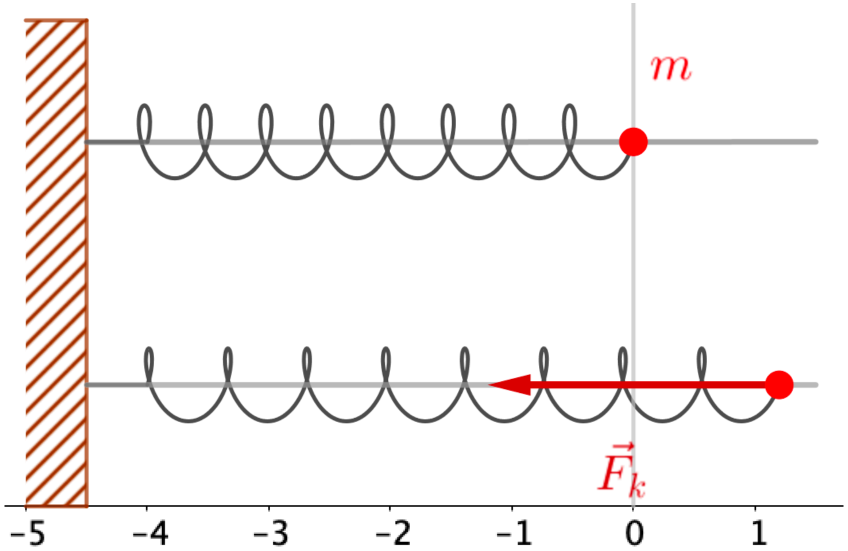


$100\ \mathrm{cm}^{-1} = 3\ \mathrm{THz}$

Animation: https://www.geogebra.org/m/mcbwvxsf

Oscillateur harmonique à une dimension

Point matériel qui glisse sans frottement sur un rail horizontal



- Repère Ox, O est la position du point matériel au repos.
- Loi de Hooke $F = -kx$
- Deuxième loi de Newton $F = m\ddot{x}$
- Equation différentielle: $m\ddot{x} = -kx$
- Conditions initiales: $x(0) = x_0, v(0) = v_0$

Oscillateur harmonique à une dimension: solution

- On réécrit l'équation différentielle

$$m\ddot{x} = -kx \iff m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\iff \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- On a introduit une nouvelle grandeur, la <u>pulsation propre</u>

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Fixée par les paramètres du système, ne dépend pas des conditions initiales

- Solution générale

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

Les noms (A, B, etc.) utilisés pour les constantes d'intégration n'ont pas de signification. Leurs valeurs dépendent de la forme de solution utilisée

ou de façon équivalente

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

où $\varphi_0 = \phi_0 + \frac{\pi}{2}$

Amplitude *Phase initiale* *Pulsation propre*

Oscillateur harmonique à une dimension: solution

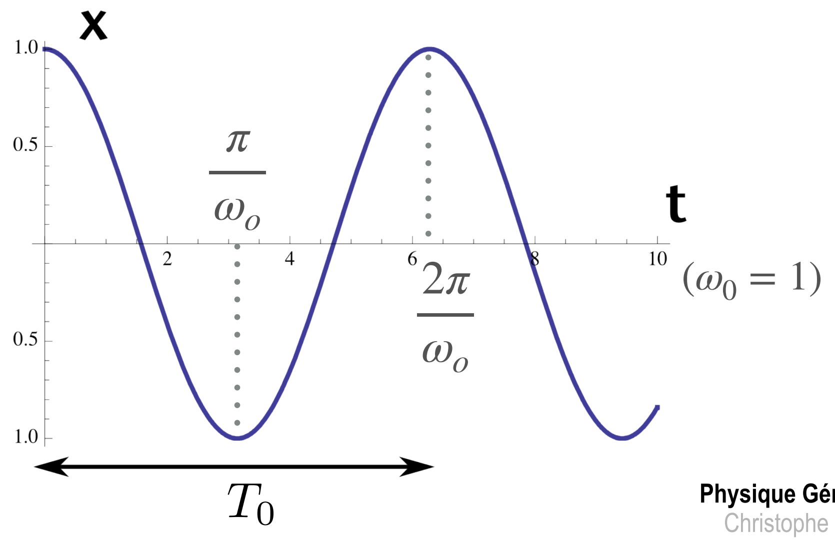
- Deux constantes à déterminer par les conditions initiales

Exemple: $B = x_0 \qquad A = \dfrac{v_0}{\omega_0}$ où $x(0) = x_0, v(0) = v_0$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

- Nature du mouvement: oscillations sinusoïdales

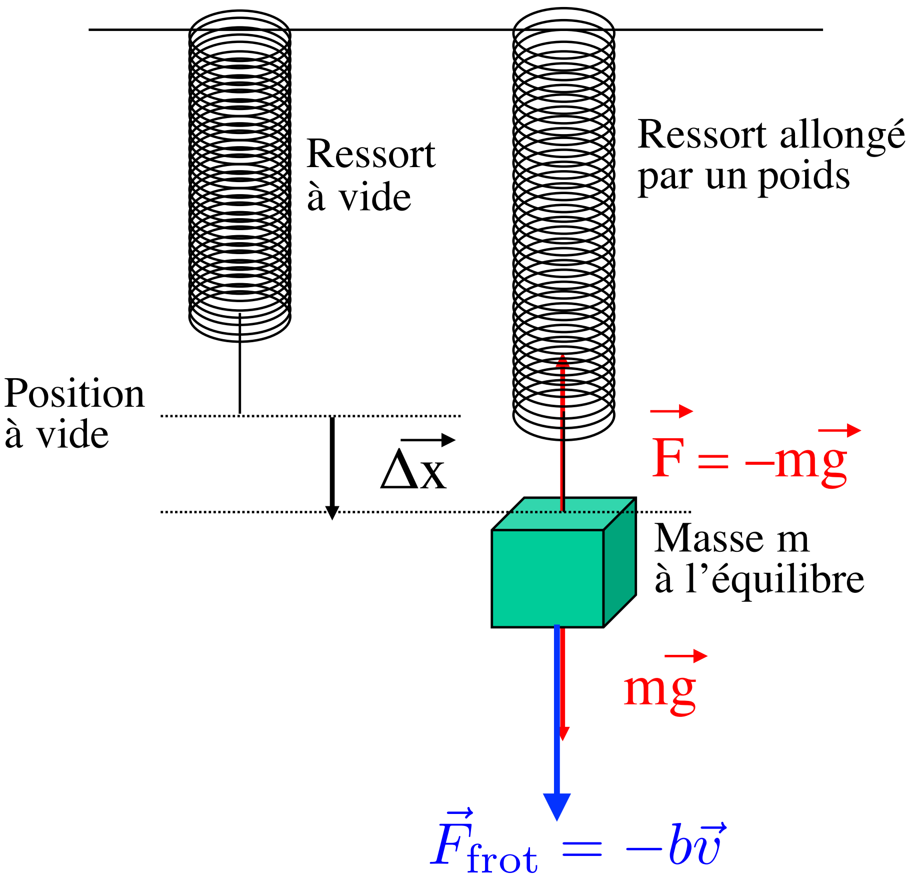
Fréquence: $\nu_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ Période: $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{1}{\nu_0}$



EPFL

Oscillateur harmonique amorti

- Force de frottement opposée et proportionnelle à la vitesse



Deuxième loi de Newton

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x} = 0$$

Coefficient d'amortissement

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

- Dimension: fréquence (ou pulsation), comme ω_0

Pourquoi ce modèle de frottement en particulier ?

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Frottement_fluide dérivation en vidéo: https://tube.switch.ch/videos/80jO3lomG4

Oscillateur harmonique amorti: solution générale

Equation différentielle à résoudre : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x} = 0}$

- Cas sous-critique (**faiblement amorti**) $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos(\tilde{\omega}t) + B\sin(\tilde{\omega}t)\right)$$

où la pulsation propre est réduite par le frottement: $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

- Cas critique $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

- Cas super-critique (**fortement amorti**) $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{-\tilde{\gamma}t} + Be^{\tilde{\gamma}t}\right)$$

c'est un déclin bi-exponentiel, où on a définit : $\tilde{\gamma} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

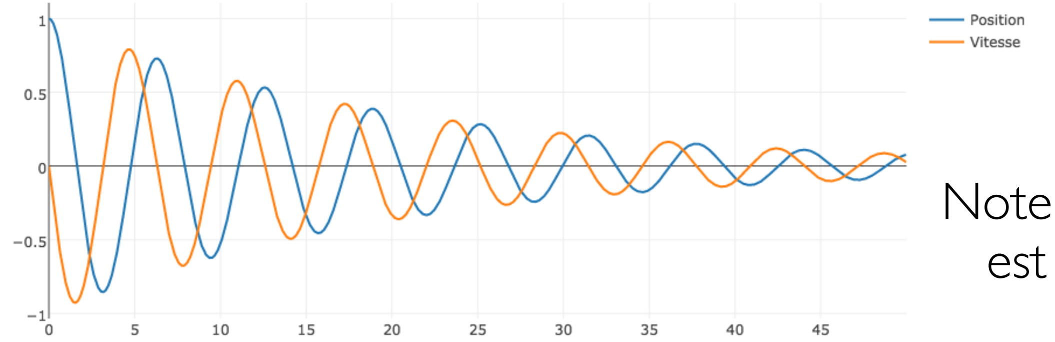
Dans tous les cas: Deux constantes d'intégration à déterminer pour satisfaire les conditions initiales

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x} = 0$$

Différents régimes d'amortissement:

- Sous-critique : plusieurs oscillations amorties (exponentiellement)

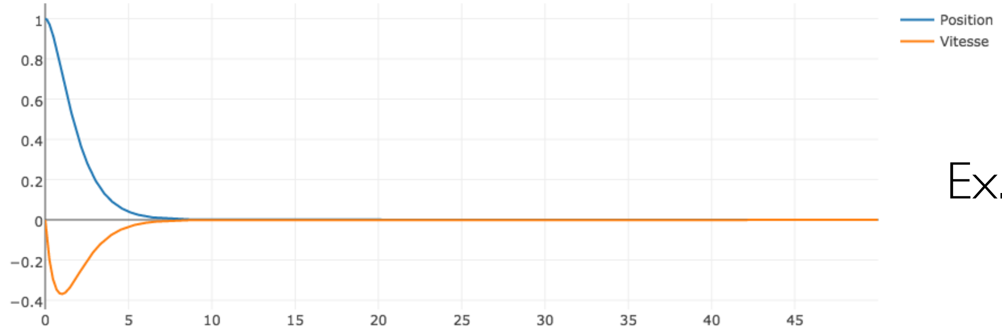
$$\gamma < \omega_0$$



Note: le **facteur de qualité** est une mesure du nombre d'oscillations

- Critique : frottement à partir duquel disparaissent les oscillations

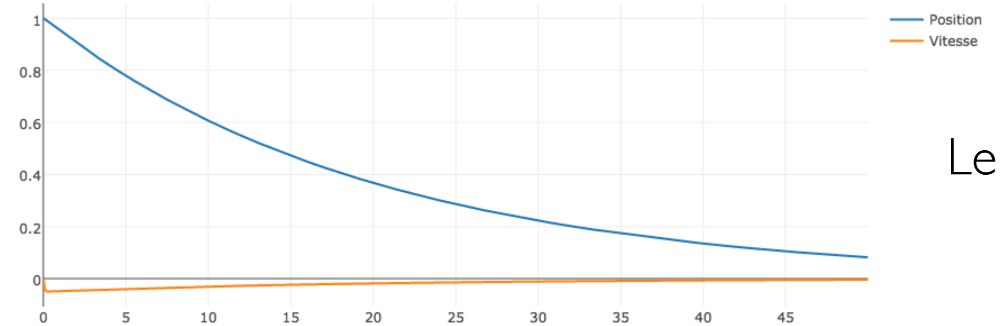
$$\gamma = \omega_0$$



Ex. : Régime recherché pour les amortisseurs de véhicules

- Super-critique : aucune oscillation

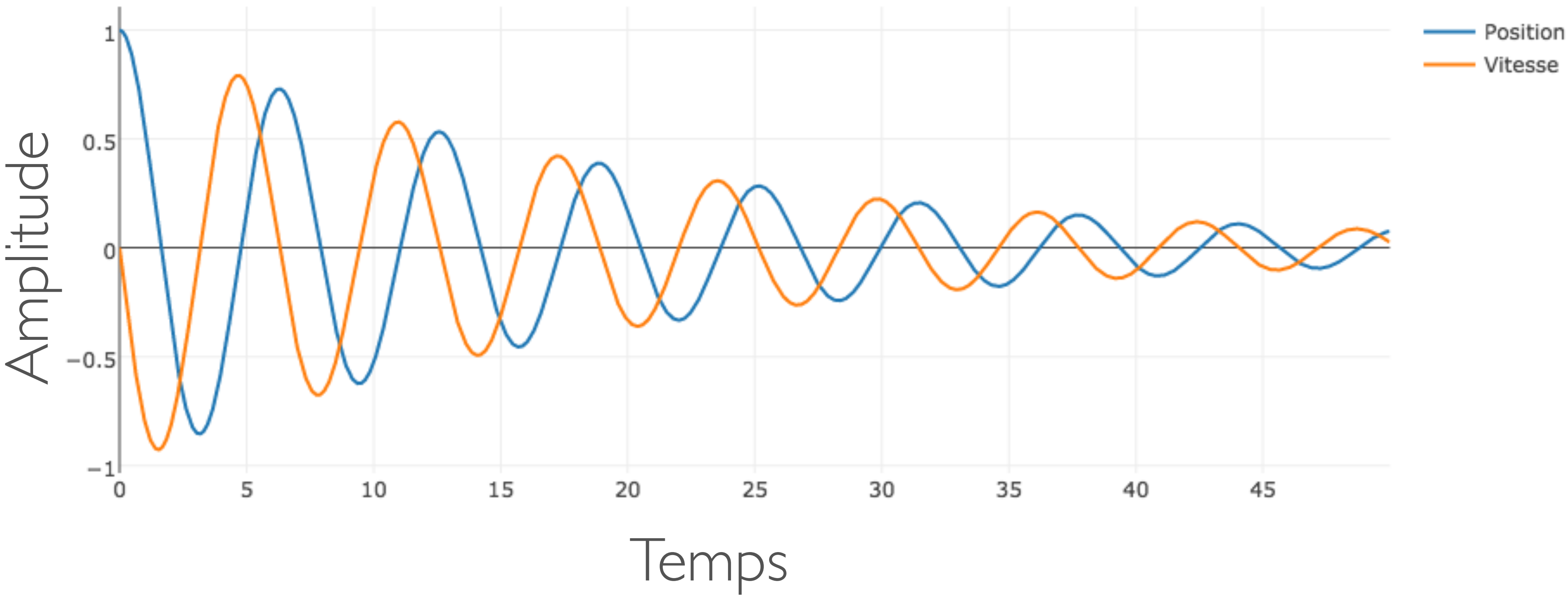
$$\gamma > \omega_0$$



Lente relaxation vers l'équilibre

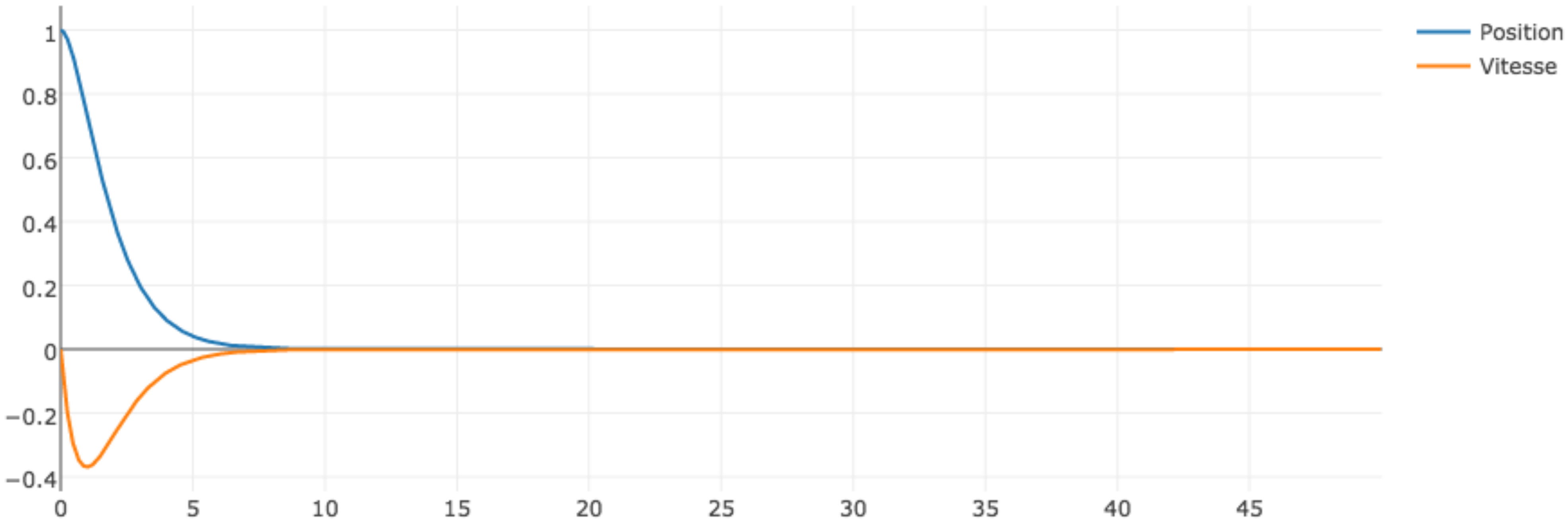
Sous-critique

$$\gamma < \omega_0$$



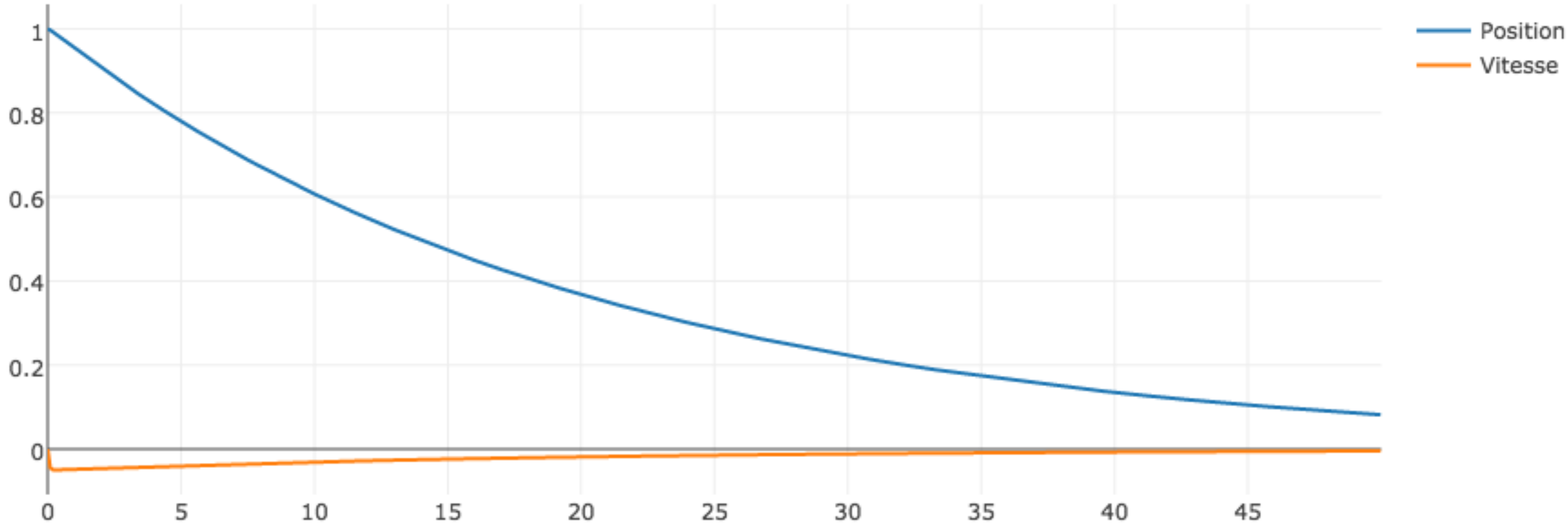
Critique

$$\gamma = \omega_0$$



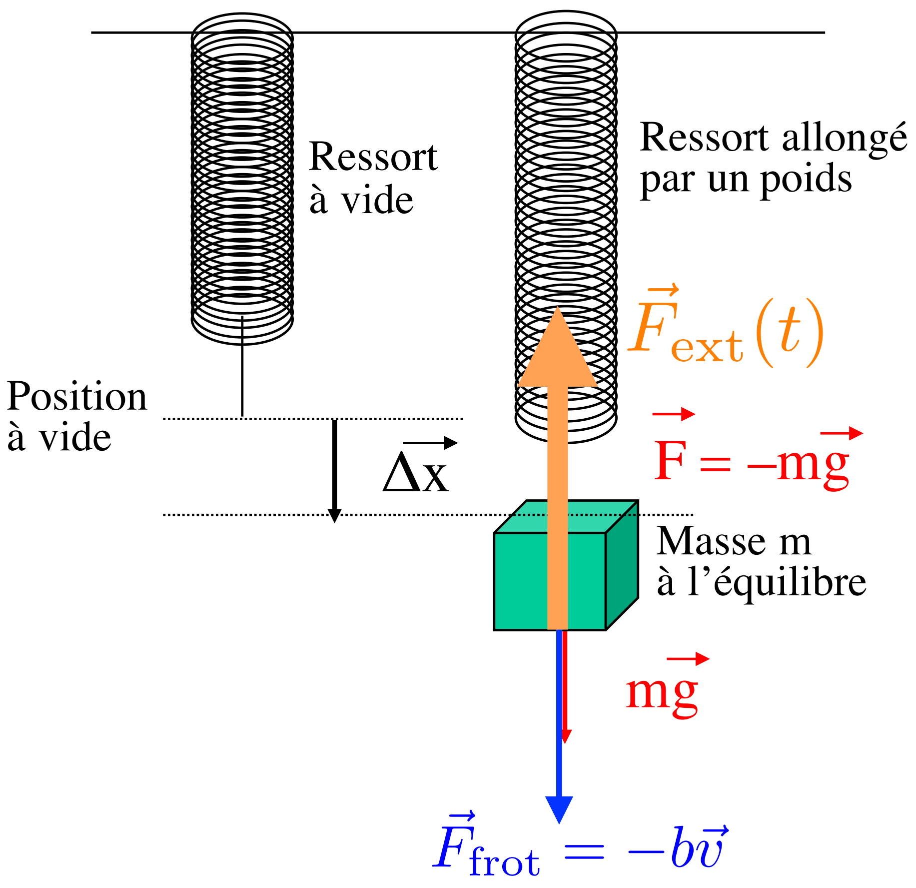
Super-critique

$$\gamma > \omega_0$$



Oscillateur harmonique forcé

- On ajoute une force extérieure dépendante du temps



Deuxième loi de Newton

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{\rm ext}(t)$$

Exemple fondamental:
force extérieure oscillante

$$F_{\rm ext}(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x} = f_0 \sin(\omega t)}$$

Amplitude du forçage

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Complément

Oscillateur harmonique forcé: solution générale

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x} = f_0 \sin(\omega t)}$$

$$x(t) = \underbrace{x_{\text{non}-\text{force}}(t)} + \underbrace{\rho \sin(\omega t - \phi)}$$

Solution du problème libre amortie lorsque $t \to \infty$

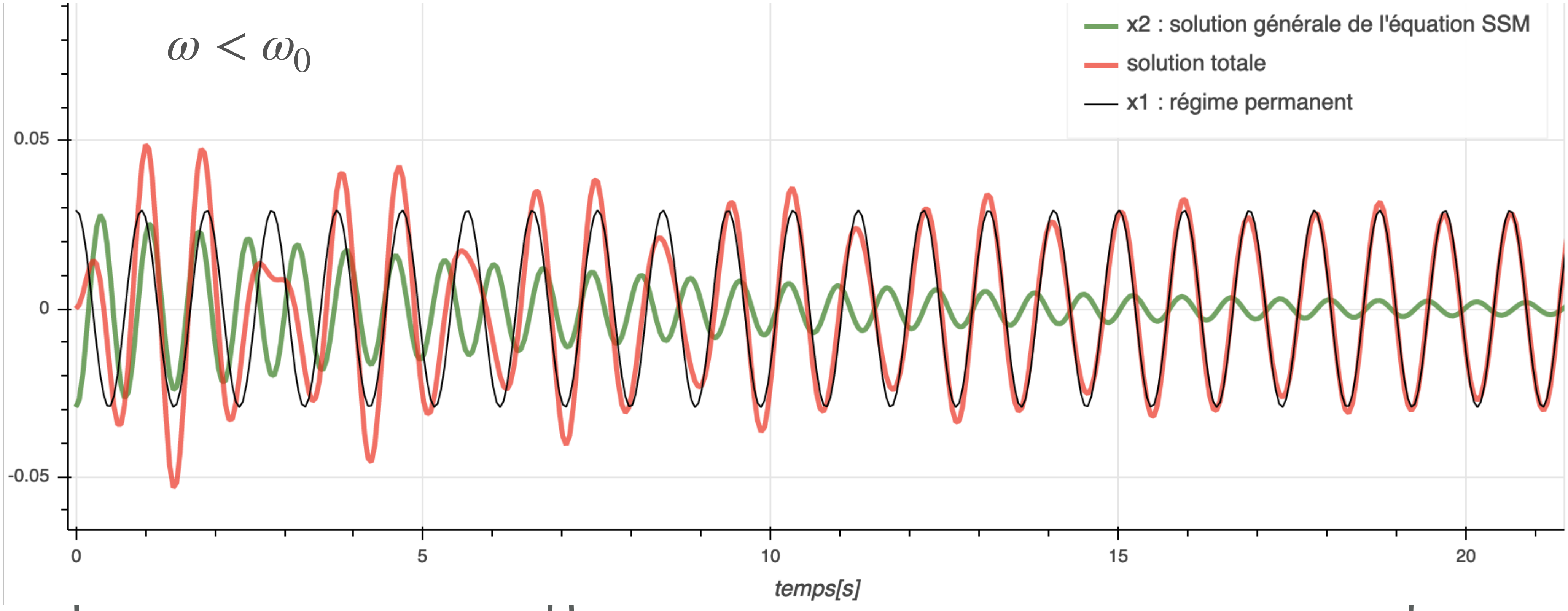
Solution stationnaire

$$\boxed{\rho = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega}} \qquad \tan(\phi) = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

- Résonance: maximum de ρ

$$\frac{d\rho}{d\omega} = 0 \implies \rho_{\max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad \omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Oscillateur harmonique forcé: solution



Les oscillations démarrent à la pulsation ω_0 et évoluent vers ω

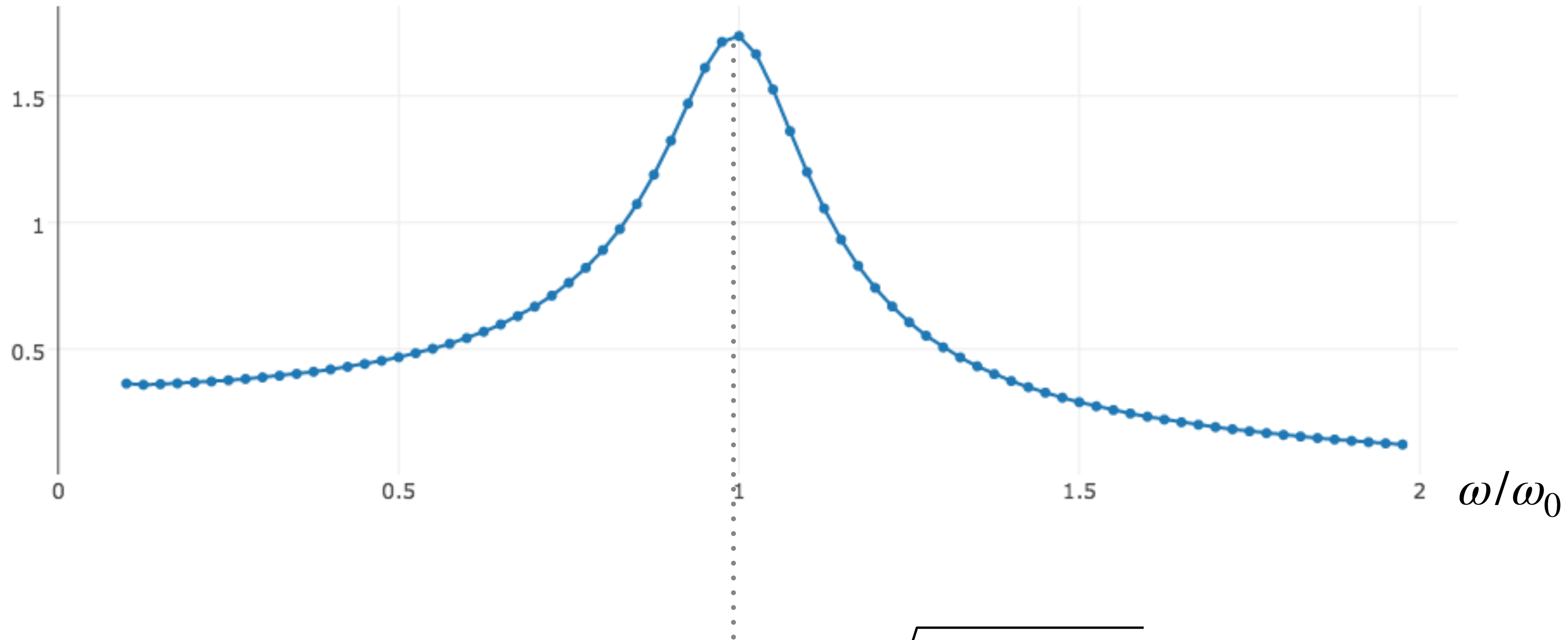
Régime stationnaire: oscillations a la pulsation du forçage ω

L'amplitude stationnaire dépend de ω !

EPFL

Oscillateur harmonique forcé: résonance

- Amplitude dans le régime stationnaire



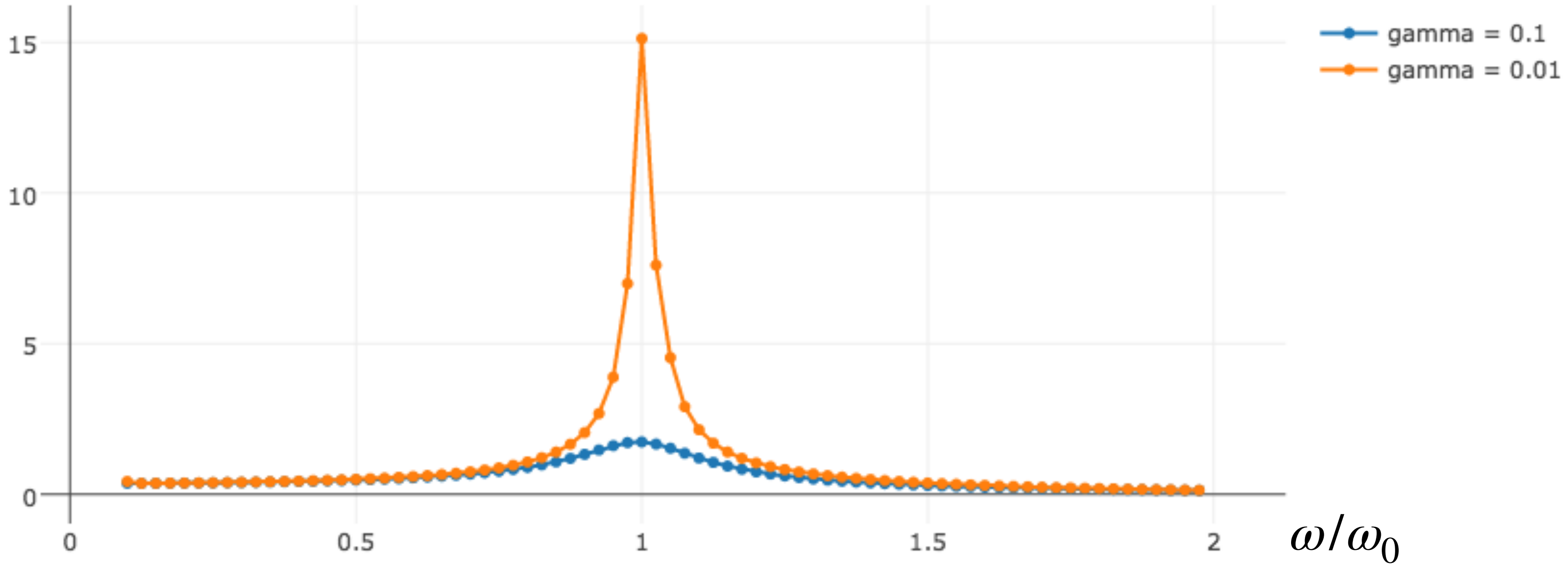
$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

L'amplitude est maximale quand la fréquence du forçage est proche de la pulsation propre

EPFL

Oscillateur harmonique forcé: résonance

- Effets de l'amortissement



L'amplitude à la résonance augmente quand l'amortissement diminue, pour une amplitude de forçage constante

EPFL

Complément

Résonances

- Effets recherchés
  - Horloges (quartz, atomes…)
  - Filtres pour signaux
  - Instruments de musique
  - Balançoire

- Effets indésirables
  - Bâtiments, ouvrages d'art
  - Véhicules (avions, voitures…)
  - Amortisseurs

Demo:
Rupture par résonance d'un verre
https://youtu.be/47cPhhywvOo

Résonance mécanique
https://youtu.be/YoMdGLqo-Jw

Synchronisation de métronomes
https://youtu.be/MpLMJdu_zMs

EPFL

Complément

Résonances

- Pont de Tacoma:
  - https://youtu.be/3mclp9QmCGs