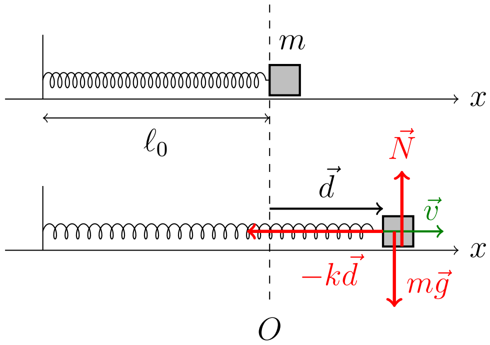
Corrigé 2 : oscillateurs harmoniques

1. **Oscillateur harmonique horizontal**

   Il est généralement judicieux de représenter une situation non particulière, à un instant t quelconque.



   (a) Les forces exercées sur la masse sont :
   — son poids $m\vec{g}$
   — le soutien $\vec{N}$ du rail
   — la force de rappel du ressort $-k\vec{d}$.
   Comme il n'y a pas d'accélération verticale pour la masse, poids et soutien se compensent :

$$\underbrace{m\vec{g} + \vec{N}}_{\vec{0}} + (-k\vec{d}) = -k\vec{d} = m\vec{a}\,.$$

   (b) Pour ce choix de l'origine, la déformation coïncide avec la position : $\vec{d} = x\vec{e}_x$.
   L'accélération, comme seconde dérivée de la position, est alors $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$.
   Ainsi, la projection selon $\vec{e}_x$ de la deuxième loi de Newton s'écrit

$$-kx = ma = m\ddot{x} \quad \forall\, t$$

   et les conditions initiales deviennent

$$x(t_0) = x_0 \quad v(t_0) = v_0\,.$$

   (c) Dérivons successivement...

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cos\big(\omega_0(t-t_0)\big) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)\\
\dot{x}(t) = v(t) &= -\omega_0 x_0 \sin\big(\omega_0(t-t_0)\big) + \omega_0\frac{v_0}{\omega_0}\cos\big(\omega_0(t-t_0)\big)\\
\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t) &= -\omega_0^2 x_0 \cos\big(\omega_0(t-t_0)\big) - \omega_0^2\frac{v_0}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)\,.
\end{aligned}$$

   Nous avons bien que position $x(t)$ et accélération $\ddot{x}(t)$ sont liées par

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

D'autre part, les conditions initiales sont effectivement vérifiées :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \cos\big(\omega_0(t_0 - t_0)\big) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\big(\omega_0(t_0 - t_0)\big) = x_0 \cos 0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin 0 = x_0 \\ v(t_0) &= -\omega_0 x_0 \sin 0 + \omega_0 \frac{v_0}{\omega_0} \cos 0 = v_0 \,. \end{aligned}$$

(d) Vérifions la condition de périodicité :

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x_0 \cos\big(\omega_0(t + \tfrac{2\pi}{\omega_0} - t_0)\big) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\big(\omega_0(t + \tfrac{2\pi}{\omega_0} - t_0)\big) \\ &= x_0 \cos\big(\omega_0(t - t_0) + 2\pi\big) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\big(\omega_0(t - t_0) + 2\pi\big) \\ &= x_0 \cos\big(\omega_0(t - t_0)\big) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\big(\omega_0(t - t_0)\big) = x(t) \quad \forall\, t \,. \end{aligned}$$

La période des fonctions cos et sin étant 2π , $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est la plus petite valeur positive vérifiant la condition de périodicité.