Exemple : $X = \{1,2\}$, $Y = \{3,4\}$, $Z = \{5\}$

$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$ (4 éléments)

⚠ $X \times Y \neq Y \times X$ (sauf si $X = Y$)

Plus généralement : $X \times Y \times Z = \{ \underbrace{(x,y,z)}_{\text{triplet}} : x \in X, y \in Y, z \in Z \}$

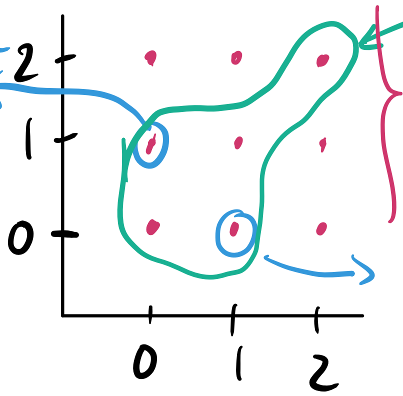
triplet (plus généralement on appelle $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet)

Définition (Relation). Soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation sur X.

Exemple : Soit $X = \{0, 1, 2\}$

$R \subset X \times X$ une relation sur X. Exemple (*)

représente $(1,0)$



Produit cartésien $X \times X$

$R = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)\}$

représente $(0,1)$

fin cours 22/09/22

Plus généralement, une relation sur X et Y est la donnée d'un ensemble $R \subset X \times Y$.

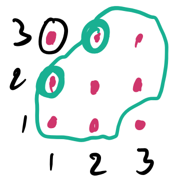
0.1.3 Classes d'équivalence

Notations : $\begin{cases} \forall \text{ signifie "pour tout"} \\ \exists \text{ signifie "il existe"} \end{cases}$

Soit X un ensemble, R une relation sur X. On dit que R est :

- **réflexive** si $\forall x \in X$, $(x,x) \in R$ — Exemple : $(*)$ est réflexive
- **symétrique** si $\forall x, y \in X$ tels que $(x,y) \in R$ alors $(y,x) \in R$ — $(*)$ est symétrique
- **transitive** si $\forall x, y, z \in X$ tels que $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$, on a $(x,z) \in R$ — $(*)$ est transitive

Un exemple de relation qui n'est pas transitive :



R pas transitive car $(1,2) \in R$, $(2,3) \in R$ mais $(1,3) \notin R$

Def : Une relation réflexive, symétrique et transitive est appelée une relation d'équivalence.

Ex : $(*)$ définit une relation d'équivalence.

Notation : si R est une relation d'équivalence et $(x,y) \in R$, on écrit $x \sim y$ et on lit "x est équivalent à y".

Exemples : Soit X l'ensemble des élèves d'Analyse I.

Relation d'équivalence ?

- $(x,y) \in R$ ssi "x et y sont nés le même mois" — Oui
- ——— "x et y sont nés à 30 jours d'intervalle ou moins" ? — Non
- ——— "x et y si ils ont un vêtement de m̂ couleur" ? — Non
- $(**)$ ——— "x et y si ils sont dans la même section" ? — Oui

Def : Soit X un ensemble, $\sim$ une relation d'équivalence.

(i) Pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence de x, notée C_x, est l'ensemble $C_x := \{y \in X : y \sim x\}$. — $y \sim x$ veut dire $(y,x) \in R$.

(ii) Le quotient de X par $\sim$, noté $X/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalences.

Exemples : • (*) la classe d'équivalence de 2 est $\{2\}$

——————————— 0 est $\{0,1\}$

1 est $\{0,1\}$

(De manière générale si $x \sim y$, alors $C_x = C_y$)

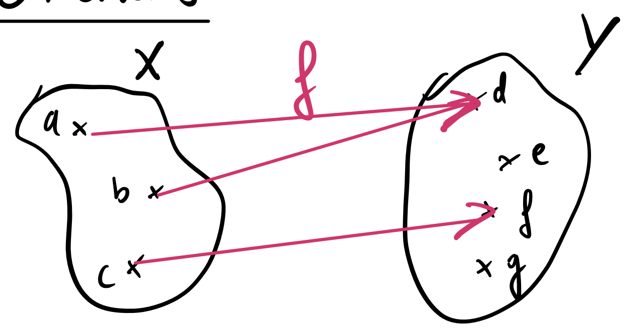
l'ensemble quotient est $\{\{0,1\}, \{2\}\} = X/\sim$

• (**) l'ensemble quotient est

$X/\sim = \{\{$élèves en MX$\}, \{$élèves en CGC$\}, \{$élèves en SC$\}\}$

0.1.4. Fonctions

(*)



Def : Soient X et Y deux ensembles. Une fonction f de X vers Y est la donnée de $G_f \subset X \times Y$ tel que $\forall x \in X$, il existe un unique y tel que $(x,y) \in G_f$.

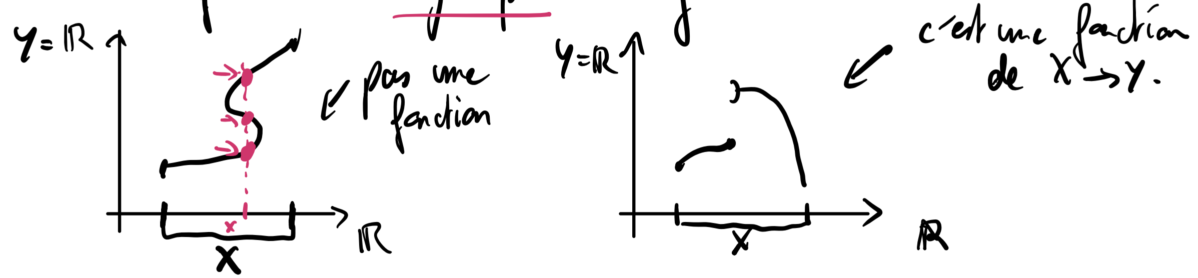
• On appelle y l'image de x par f, on note $y = f(x)$.

• On note $f : \begin{vmatrix} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{vmatrix}$ (remarquez la différence entre les flèches)

• On appelle X le domaine et Y le co-domaine de f.

• Et G_f est le graphe de f.

Exemple :



Déf : Soit $f : X \to Y$ et $A \subset X$ et $B \subset Y$.

Exemple ci-dessus (*)

(i) l'image de A par f, notée $f(A)$, est l'ensemble
$f(A) = \{ f(z) \ ; \ z \in A \}$

$f(\{a,b\}) = \{d\}$

(ii) L'ensemble image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble
$\mathrm{Im}(f) = \{ f(z) : z \in X \} = f(X)$

$\mathrm{Im}(f) = \{d, f\}$

(iii) La pré-image de B par f, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble
$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}$

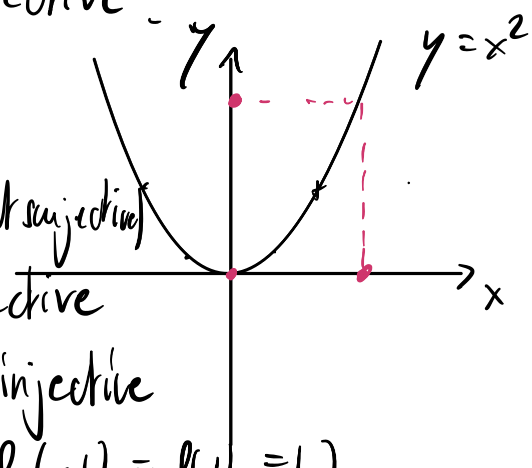
$f^{-1}(\{e\}) = \emptyset$
$f^{-1}(\{d\}) = \{a,b\}$

Déf : Soit $f : X \to Y$. On dit que :

- f est <u>injective</u> si $\forall x, y \in X$ tels que $x \neq y$, on a $f(x) \neq f(y)$
- f est <u>surjective</u> si $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $f(x) = y$
  (autrement dit $\mathrm{Im}(f) = Y$)
- f est <u>bijective</u> si elle est <u>injective</u> et <u>surjective</u>.

<u>Ex</u> : (*) ci-dessus : ni injective ni surjective.

<u>Exemple</u> : Considérons $f(x) = x^2$
$(x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$



$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$: bijective (injective et surjective)
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$: injective mais pas surjective
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$: surjective mais pas injective
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ni injective (ex : $f(-1) = f(1) = 1$)
ni surjective (ex : -1 n'a pas d'antécédent par f)

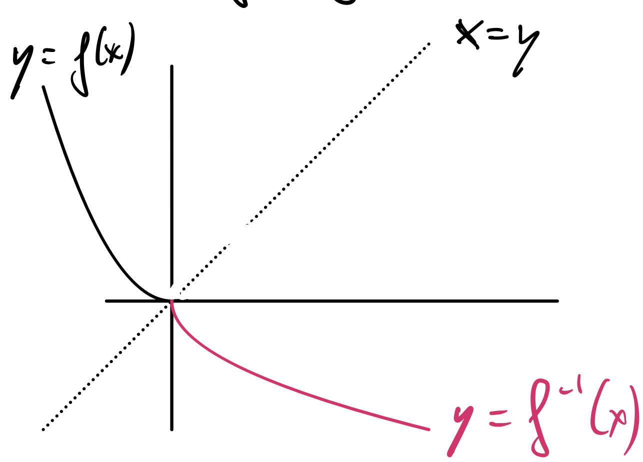
Remarques : • $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ est toujours surjective.
• Si $f : X \to Y$ injective alors $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective

Déf/prop : (fonction réciproque). Si $f : X \to Y$ est bijective alors elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : Y \to X$ telle que
$$f^{-1}(y) = x \quad \text{ssi} \quad f(x) = y$$

On a donc : $\forall y \in Y, f(f^{-1}(y)) = y$ et $\forall x \in X, f^{-1}(f(x)) = x$

Exemple : $f : \begin{vmatrix} \underbrace{\mathbb{R}_-}_{} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ $= \{x \in \mathbb{R} ; x \leq 0\}$

$f^{-1} : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_- \\ x \mapsto -\sqrt{x} \end{vmatrix}$



↓ fin cours 26/09