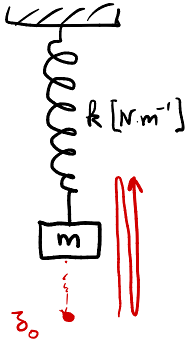
Semaine 02 - oscillateur harmonique

I) Expériences

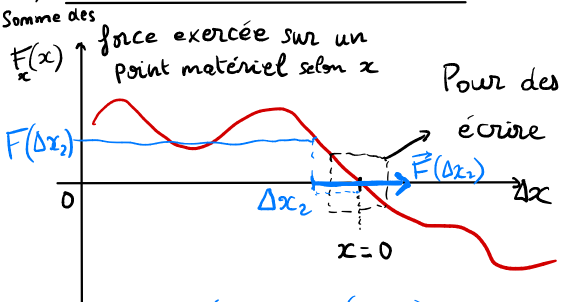


* La fréquence (nombre d'oscillations par unité de temps) ne dépend pas de l'amplitude du mouvement
  ↳ Définition d'un oscillateur harmonique.

* La fréquence diminue si on augmente la masse.
* La fréquence augmente avec la raideur du ressort.

II) "Universalité" de ce modèle : $\vec{F} = -k\,\vec{\Delta x}$?

(on considère le mvt selon une seule dimension)



Pour des petits déplacements, on peut toujours écrire proche du point d'équilibre :

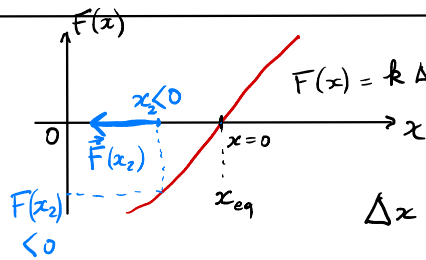
$$F(x) = -k\,\Delta x \quad \text{avec } k > 0$$

Equilibre stable.

$\Delta x_2 < 0 \Rightarrow F(\Delta x_2) > 0$

---

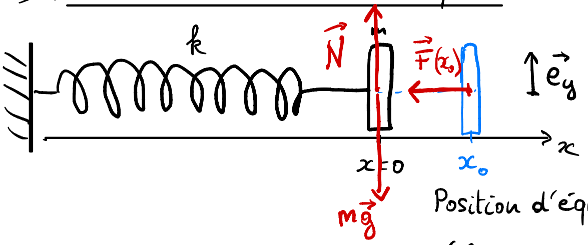
* Equilibre instable



$F(x) = k\,\Delta x$ avec $k > 0$

$$\Delta x = x - x_{eq}$$

III) Résolution mathématique



Pour $x_0 > 0$, $F(x_0) = -k x_0 < 0$

↳ $\vec{F}(x_0) = -k x_0 \vec{e}_x$

Position d'équilibre ⇒ Longueur à vide du ressort.

(⚠ différent pour mvt verticaux)

* Selon y : $\Sigma F_y = N_y - mg = 0$ ⟶ ... $y(t) = 0 \quad \forall t$

* Selon : force de rappel $F(x) = -kx$

* <u>Equation du mvt</u> : $m\ddot{x} = -k x(t)$ équation différentielle d'ordre 2

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$ oscillateur harmonique sans frottement

↳ dimension $[s^{-2}] = [Hz^2]$

Essayons : $\boxed{x(t) = \underset{\text{amplitude}}{A_0} \cos(\underset{\text{pulsation}}{\omega} t + \underset{\text{phase}}{\varphi_0})}$ → $\dot{x} = -\omega A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

$\ddot{x} = -\omega^2 A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

$= -\omega^2 x(t)$

Solution générale !

(De même avec $B_0 \sin(\omega t + \Phi_0)$ ...)

Pour que $x(t)$ soit solution non nulle : $\underbrace{-\omega^2 x(t)}_{\ddot{x}} + \frac{k}{m} x(t) = 0$

il faut que $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ⟶ on choisit la pulsation positive : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ Pulsation propre

* lien entre ω_0 et la période d'oscillation ?

Période T ⟶ $A_0 \cos(\underbrace{\omega_0(t+T)}_{\omega_0 t + \omega_0 T} + \varphi_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \forall t$

↳ Satisfaite pour $\omega_0 T = 2\pi$ ⇒ $\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0 \\ T = \frac{2\pi}{\omega_0} \end{array} \right.$

IV) La pulsation propre ω_0

unité $[rad \cdot s^{-1}]$, dimension $[s^{-1}]$

ne dépend pas des conditions initiales !

↳ $\boxed{\omega_0 = 2\pi \times f_0}$ où f_0 est la fréquence $[s^{-1}]$

V) Solution générale :

$$\boxed{x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

une forme possible.

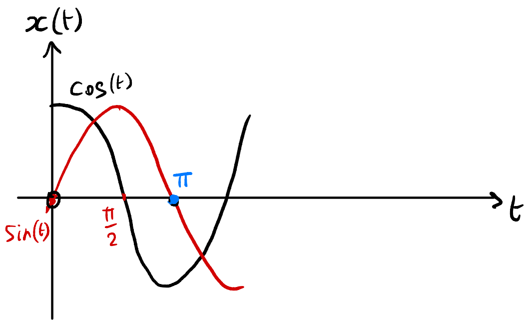
Pour les conditions initiales (i) $x(t=0) = x_0$ (ii) $v(t=0) = v_0$

(i) $A_0 \cos(0 + \varphi_0) = x_0 \Leftrightarrow A_0 \cos \varphi_0 = x_0$

(ii) $\dot{x}(t) = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \dot{x}(t=0) = -\omega_0 A_0 \sin(\varphi_0) = v_0$

Solution pour x_0, v_0 quelconques ← ↳ page suivante

$$\begin{cases} A_0 \cos \varphi_0 = x_0 \\ A_0 \sin \varphi_0 = -\dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$



* Cas particulier : $x_0 > 0$; $v_0 = 0$

(ii) $\sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = 0}$

(i) $A_0 \cos(0) = \boxed{A_0 = x_0}$

$(\varphi_0 = \pi)$ Autre choix possible ?

(ii) $\varphi_0 = \pi$ $\boxed{\varphi_0 = \pi}$

(i) $A_0 \cos(\pi) = x_0 \Rightarrow \boxed{A_0 = -x_0}$

Ces deux choix correspondent au même mouvement !

Autres formes de solution correctes, possibles et équivalentes

$$\boxed{x(t) = A_0' \sin(\omega_0 t) + B_0' \cos(\omega_0 t)}$$

Les coefficients ne seront pas les mêmes selon la forme de solution choisie, pour les mêmes conditions initiales.

ou encore $x(t) = A_0'' \sin(\omega_0 t + \varphi_0'')$

$A_0'' = A_0$ (même amplitude que pour $\cos(\dots)$)

Complément $\begin{cases} A_0 \cos\varphi_0 = x_0 \\ A_0 \sin\varphi_0 = -\dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$ $\rightarrow$ A_0, φ_0 lorsque $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$?

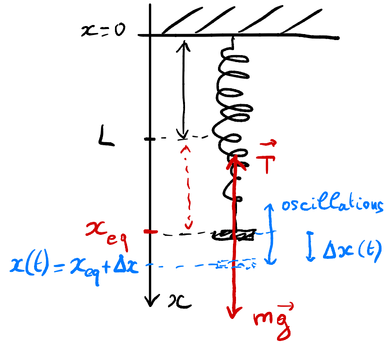
① On somme les carrés des deux expressions pour faire disparaître $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$A_0^2 \left(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 \right) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{A_0 = \pm\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}}$$

② En faisant le quotient on trouve $\tan\varphi_0 = -\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_0 = \arctan\left(-\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}\right)}$

(on peut choisir $\varphi_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$)

Semaine 02 - oscillateur harmonique, II



I) Retour sur série 02 → méthode de résolution

L = longueur à vide → position de la masse pour laquelle $\vec{T} = \vec{0}$ (tension du ressort)

On trouve x_{eq} (position d'équilibre) :

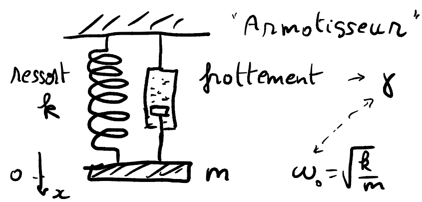
$$mg - k x_{eq} + kL = 0 \iff x_{eq} = L + \frac{mg}{k}$$

Equation du mvt : $mg - k\,x(t) + kL = m\ddot{x}$

On injecte $x(t) = x_{eq} + \Delta x(t)$ alors :

$$\underbrace{mg - kx_{eq} + kL}_{=0} \boxed{- k\,\Delta x(t) = m\,\ddot{\Delta x}}$$ ✓

II) Oscillateur harmonique amorti



On modélise les frottements par une force proportionnelle est opposée à la vitesse :

$$\vec{F}(t) = -\underbrace{2m\gamma}_{b}\,\vec{v}(t)$$

ainsi γ a la dimension d'une fréquence → donc on peut le comparer à ω_0

Equation du mvt selon x (autour de la position d'équilibre) :

$$(1)\quad \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

oscillateur harm. amorti

La dérivée d'une fonction exponentielle est proportionnelle à elle-même :

$$x(t) = A\,e^{rt} \rightarrow \dot{x}(t) = r\,A\,e^{rt} \rightarrow \ddot{x}(t) = r^2 A\,e^{rt}$$

($r = [s^{-1}]$)

Si on injecte dans (1) : $A e^{rt}\left(r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2\right) = 0$

On cherche les solutions où $A \neq 0$ → alors on doit avoir :

$$\rightarrow r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$$

{ racines d'un polynôme de second degré.

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$$

Déterminant $\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$

* Si $\boxed{\gamma > \omega_0}$ (frottements grands) $\rightarrow$ $\Delta > 0$ régime super-critique

Deux racines réelles : $r_\pm = \dfrac{-2\gamma \pm 2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \tilde{\gamma}$

où $\tilde{\gamma} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$

Solution générale : $x(t) = A e^{r_- t} + B e^{r_+ t}$

$= e^{-\gamma t}\left(A e^{-\tilde{\gamma} t} + B e^{\tilde{\gamma} t}\right)$ $\quad A, B \in \mathbb{R}$

* Si $\boxed{\gamma < \omega_0}$ (frottements faibles) $\rightarrow$ $\Delta < 0$ régime sous critique

Deux racines complexes conjuguées : $r_\pm = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\tilde{\omega}$

$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Solution générale : $x(t) = A e^{r_- t} + B e^{r_+ t}$ où $A, B \in \mathbb{C}$

$= e^{-\gamma t}\left(A e^{-i\tilde{\omega} t} + B e^{+i\tilde{\omega} t}\right)$

Formule d'Euler : $\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$ $\quad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$\hookrightarrow$ $x(t) = e^{-\gamma t}\left((A+B)\cos(\tilde{\omega}t) + i(B-A)\sin(\tilde{\omega}t)\right)$ On veut que $x \in \mathbb{R}$

Pour $A = a + ib$ et $B = a - ib$ (conjugués) : $a, b \rightarrow$ constantes d'intégration

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left(2a\cos\tilde{\omega}t + 2b\sin\tilde{\omega}t\right)}$$ où $a, b \in \mathbb{R}$

* Si $\Delta = 0$; c'est à dire $\gamma = \omega_0$: régime critique

$\rightarrow$ régime où l'amortissement est le plus rapide.

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)}$$

Après un temps τ,

$e^{-t/\tau} \sim \frac{1}{2.73} = e^{-1}$

temps caractéristique $\tau = 1/\gamma \rightarrow e^{-t/\tau}$