EPFL Lénaïc Chizat
Sections MX-SC-CGC 3 octobre 2022

Analyse I – Série 2

Remarque générale.
Les exercices 1 et 5 sont des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie. Une étoile ($\star$) indique un exercice un peu plus difficile.

Echauffement 1. (Notion de couple)

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5, 6\}$.

a) Est-ce que le couple $(3, 2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?
b) Montrer que le produit cartésien n'est pas associatif, c'est-à-dire que $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$.

Exercice 1. (V/F : ensembles)

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides.
On note $A \setminus B$ pour la différence des ensembles A et B, et $A \cap B$ pour leur intersetion, c.-à-d.

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} \qquad \text{et} \qquad A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

	V	F
a) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$	☐	☐
b) $A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad A = B$	☐	☐
c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	☐	☐

Exercice 2. (Relations d'équivalence)

Soit X un ensemble. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence. Quels sont dans les deux cas les ensembles quotient $X/_\sim$?

a) $x \sim y$ ssi $x = y$, pour tout $x, y \in X$; (NB : “ssi” est une abbréviation pour “si et seulement si”)
b) $x \sim y$, pour tout $x, y \in X$.

Exercice 3. (Relations d'équivalence)

a) Montrer que $x \sim y$ ssi $xy > 0$, définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^*$. Quel est l'ensemble quotient ?
b) Montrer que $x \sim y$ ssi $x - y$ est pair, définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Quel est l'ensemble quotient ?
c) Est-ce que $x \sim y$ ssi $x - y$ est impair, définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 4. (Graphes, fonctions)

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$.

a) Trouver tous les sous-ensembles de $X \times Y$ qui sont le graphe d'une fonction de X dans Y.
b) Combien de ces fonctions sont injectives, surjectives, bijectives ?
c) Pour les fonctions injectives, trouver le graphe de la fonction réciproque correspondante.

Exercice 5. (V/F : fonctions)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

	V	F
a) $f \circ g = g \circ f \quad \Leftrightarrow \quad f = g$.	☐	☐
b) Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.	☐	☐
c) Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.	☐	☐
d) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.	☐	☐
e) Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective.	☐	☐
f) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.	☐	☐

Exercice 6. (Relations)

La relation d'orthogonalité entre deux droites du plan est-elle symétrique ? réflexive ? transitive ?

Exercice 7. (Raisonnement par récurrence)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme de carrés d'entiers) ;
b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme alternée de carrés d'entiers) ;
c) ($\star$) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2} n(n+1)\right)^2$ (somme de cubes d'entiers).

Calculer $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2)$.

Exercice 8. (Raisonnement par récurrence)

Montrer par récurrence l'**inégalité de Bernoulli** : pour tout entier $n \geq 1$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,, \quad \forall x \geq -1\,.$$

Exercice 9. (Négation et quantificateurs)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
2. ($\star$) $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$.
3. ($\star$) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.