II. Accroissements finis

La dernière règle de base pour pouvoir dériver de nombreuses fonctions est celle de la composition de deux fonctions. Nous passerons ensuite à l'un des théorèmes les plus importants de ce module, celui des accroissements finis. Il nous permettra entre autres de démontrer la règle de Bernoulli-L'Hospital sur le calcul de certaines limites de quotients.

1 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 1.1. *Soient f et g des fonctions réelles telles que $g \circ f$ existe. On suppose que f est dérivable en a et g en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot \underbrace{f'(a)}_{\text{dérivée interne}}$$

Démonstration. Lorsque $f(x) \neq f(a)$ on peut écrire

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \underset{(*)}{\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)}} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \to a} f'(a)$$

Par conséquent, lorsque x tend vers a (et donc, par continuité de f, $f(x)$ tend vers $f(a)$), on voit que la limite de l'expression ci-dessus tend vers $g'(f(a)) \cdot f'(a)$.
Si $f(x) = f(a)$ dans un voisinage de a, alors la fonction f est constante autour de a. Dans ce cas, la dérivée est égale à $f'(a) = 0$ et comme $g \circ f$ est aussi constante dans un voisinage de a, $(g \circ f)'(a) = 0$ et la formule est vraie aussi. □

Exemple 1.2. Considérons la fonction $h(x) = (x^2 - 3x + 4)^7$.

$$x \xmapsto{f} x^2 - 3x + 4 = y \xmapsto{g} g(y) = y^7 = (x^2 - 3x + 4)^7$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 7(x^2 - 3x + 4)^6 \cdot (2x - 3)$$

(*)

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \overset{\substack{y = f(x) \\ b = f(a)}}{=} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \xrightarrow[\text{(f continue)}]{x \to a,\ y \to b} g'(b) = g'(f(a))$$

Thm 3.6 $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ où $b = f(a)$

Exemple 1.3. Considérons la fonction $h(x) = x^r$ où r est un nombre rationnel positif, disons $r = p/q$, où p et q sont des nombres entiers positifs.

Posons $f(x) = x^p$ et $g(x) = \sqrt[q]{x} = y$ $\Longrightarrow h(x) = (g \circ f)(x)$

$f'(x) = p x^{p-1}$ et $g(x)$ est la réciproque de $g^{-1}(y) = y^q$

$\overset{\text{Thm 3.6}}{\Longrightarrow}$ $g'(x) = \frac{1}{q y^{q-1}} = \frac{1}{q(\sqrt[q]{x})^{q-1}} = \frac{1}{q\, x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}}$

$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1-q}{q}} \cdot p x^{p-1} = \frac{p}{q} x^{p(\frac{1}{q}-1)+p-1} = \boxed{\frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}}$

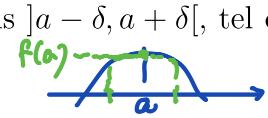
Comme $r = \frac{p}{q}$, on obtient $h'(x) = r \cdot x^{r-1}$, $\forall r \in \mathbb{Q}_+$

Nous avons maintenant à notre disposition un tel arsenal de règles de dérivation que nous pouvons aussi répondre à la question suivante : nous connaissons des fonctions continues qui ne sont pas dérivables, des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas dérivable en tout point, mais existe-t-il des fonctions dérivables en tout point dont la dérivée n'est pas continue ? La réponse se trouve dans la série d'exercices...

2 Recherche du minimum et maximum

L'un des points les plus importants d'une étude de fonction est de trouver ses extrema (minimum et maximum). Le premier résultat nous apprend que les points où la dérivée s'annule sont des candidats sérieux.

Rappelons qu'un point a est un *maximum local* (respectivement *minimum local*) s'il existe un voisinage de a, disons $]a-\delta, a+\delta[$, tel que $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$.



Proposition 2.1. *Soit f une fonction réelle dérivable en a. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Nous effectuons la preuve dans le cas où a est un minimum local, si bien que $f(x) \geq f(a)$ au voisinage de a.

La dérivée en a coïncide avec la dérivée obtenue comme limite à gauche ou à droite de a :

$\Longrightarrow$ $f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ car $f(x) - f(a) \geq 0$ et $x - a \geq 0$

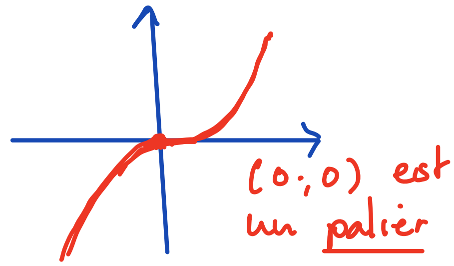
et $f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ $f(x) - f(a) \geq 0$ et $x - a \leq 0$ □

$\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$

Remarque 2.2. La dérivée d'une fonction peut être nulle en un point sans que ce point soit un extremum local.

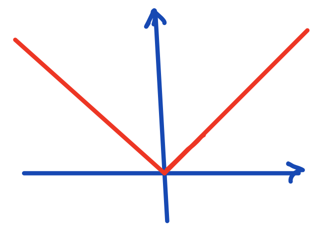
Par exemple $f(x) = x^3 \Longrightarrow$

$f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$



D'autre part, il existe des fonctions qui admettent un extremum local en un point où la dérivée ne s'annule pas.

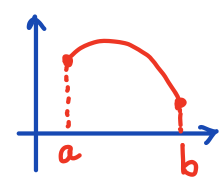
$f(x) = |x|$ admet un minimum en $x = 0$ et $f'(0)$ n'existe pas



Parmi quels points faut-il chercher les extrema locaux d'une fonction réelle ? Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé, vous avez vu l'année passée que cette fonction va nécessairement atteindre son maximum et son minimum.

Théorème 2.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé. Alors f atteint son maximum et son minimum parmi*

- les points où la dérivée s'annule
- les points où la dérivée n'existe pas
- les points d'abscisse a ou b



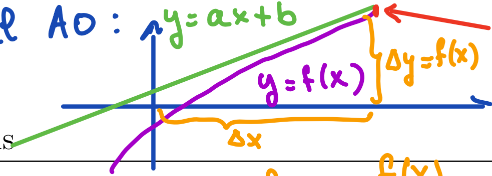
Démonstration. Si f atteint son minimum (resp. maximum) en un point d'abscisse $m \in]a; b[$ où la dérivée existe, alors par prop. 2.1, $f'(m) = 0$. Sinon, son point de minimum ne peut être que a ou b ou un point où la dérivée n'existe pas. □

Exemple 2.4. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. D'autre part, l'expression $x^4(x-1)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, si bien que la racine cinquième aussi :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ et

Rappel AO :



$\delta(x) = ax+b - f(x)$

Si AO existe, $\delta(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Ainsi $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - ax\right)$

$a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

Le théorème de la valeur intermédiaire nous assure déjà l'existence d'un point où la fonction va couper l'axe Ox et de fait on voit facilement que $f(x)$ s'annule en $x = 0$ et $x = 1$.

— AV : pas d'AV car $ED(f) = \mathbb{R}$ (pas de pôle, pas de bord)

— AH : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \neq b \Rightarrow$ pas d'AH

— AO : si AO : $y = ax+b$ existe, alors

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{x^4(x-1)}{x^5}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{x^5-x^4}{x^5}} = 1$$

$$\text{et } b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5-x^4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}} - 1\right) = \text{"}\infty\cdot 0\text{"}$$

Changement de variable : on pose $u = \sqrt[5]{1-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow u^5 = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-u^5}$

et si $x \longrightarrow \infty$ alors $u \longrightarrow 1$.

$$b = \lim_{u\to 1}\frac{1}{1-u^5}(u-1) = \lim_{u\to 1} -\frac{1-u}{1-u^5} = -\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(1-u)}\ 1}{\cancel{(1-u)}(1+u+u^2+u^3+u^4)}$$

$$= -\lim_{u\to 1}\frac{1}{1+u+u^2+u^3+u^4} = -\frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad AO : y = x - \frac{1}{5}$$

— Dérivée : $f(x) = (x^5-x^4)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$ d'où

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x^5-x^4)^{-\frac{4}{5}}\cdot(5x^4-4x^3) = \frac{1}{5}\,\frac{5x^4-4x^3}{\sqrt[5]{(x^5-x^4)^4}}$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{x^3(5x-4)}{x^3\sqrt[5]{x(x-1)^4}} = \frac{5x-4}{5\cdot\sqrt[5]{x(x-1)^4}}$$

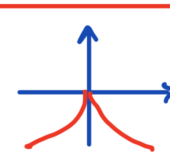
$(x^5-x^4)^4 = (x^4(x-1))^4 = x^{16}(x-1)^4 = x^{15}\cdot x(x-1)^4 = (x^3)^5\cdot x(x-1)^4$

↑ on le sort de $\sqrt[5]{\ }$

Ainsi $D(f') = \mathbb{R}^* - \{1\}$ f non dérivable en 0 et 1

On calcule $\lim\limits_{x\to 0_-} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x) = -\infty$

En $(0; f(0)) = (0;0)$, on a un point de rebroussement :



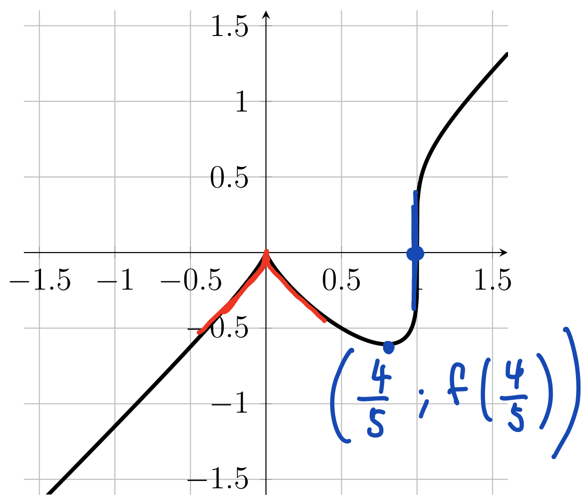
De plus $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = +\infty \Rightarrow$ en $(1; f(1)) \Rightarrow$

En $(1; f(1)) = (1;0)$, on a une tangente verticale.

Que pouvons-nous dire de ces calculs ?

- f n'a pas de maximum et de minimum globaux car elle admet une asymptote oblique.
- le graphe fait un "pic" en $x = 0$
- Les candidats pour les extrema locaux sont $0, 1, \frac{4}{5}$

Nous verrons plus tard comment déterminer analytiquement ce qui se passe en ces points. Pour le moment, demandons à Mathematica de tracer le graphe de cette fonction :



$f(1) = 0$

" $f'(1) = \infty$ "

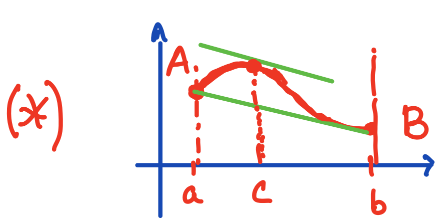
$\Rightarrow$ tangente verticale en $x = 1$

Nous observons que le point $(0; 0)$ est un maximum local, le point $\left(\frac{4}{5}; -\frac{\sqrt[5]{256}}{5}\right)$ est un minimum local et le point $(1; 0)$ n'est pas un extremum local.

3 Le Théorème des accroissements finis

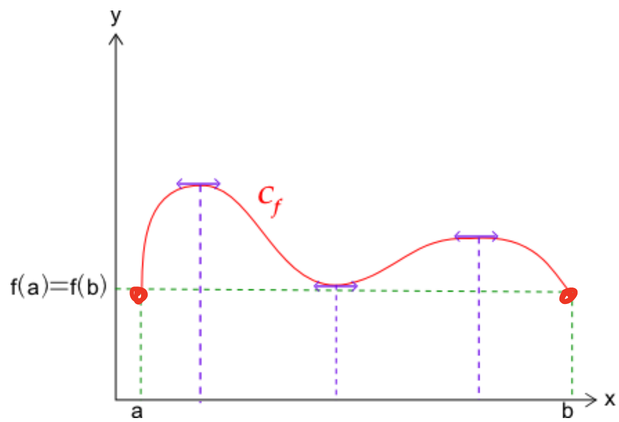
Le théorème des accroissements finis prédit l'existence d'un point du graphe d'une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ où la pente de la tangente est la pente du segment joignant $(a; f(a))$ à $(b; f(b))$. Un cas particulier est donné par le Théorème de Rolle (1652–1719 ; ce théorème semble avoir été connu par les mathématiciens indiens dès le 12 siècle, mais la première preuve connue est celle de Michel Rolle en 1691). (*)

Théorème 3.1. de Rolle.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.



Démonstration. Si la fonction f est constante, le résultat est évident.
Sinon, comme la fonction est continue sur $[a;b]$ fermé, elle atteint son maximum et son minimum sur $[a,b]$.
Ces points sont forcément parmi a, b ou un point où la dérivée s'annule (car f' est définie partout).
Comme $f(a) = f(b)$, au moins un des deux points (de min ou de max) se trouve dans $]a,b[$, et en ce point c, $f'(c) = 0$. □

Géométriquement, cela signifie que quelque part entre a et b il existe un point (au moins) où la pente de la tangente est nulle, c'est-à-dire parallèle à l'axe Ox.



Une généralisation immédiate de ce théorème sera démontrée en exercice. Il s'agit d'un des théorèmes les plus importants du chapitre : le Théorème des accroissements finis.

Théorème 3.2. des accroissements finis.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a,b[$. Il existe alors un point $a < c < b$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Plutôt que d'illustrer ce théorème par des exemples, voyons quelles conséquences théoriques il a !

Corollaire 3.3. *Soient f et g des fonctions continues dont les dérivées f' et g' coïncident en tout point de $]a,b[$. Alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x) + c$ pour tout $a < x < b$.*

Démonstration. Posons $h(x) = f(x) - g(x)$. Une différence de fonctions continues et dérivables est aussi continue et $h'(x) = 0$ pour tout $a < x < b$. Appelons $c = h(a)$ et regardons donc de plus près un point $a < d < b$. Nous voulons démontrer que $h(d) = c$. Par le Théorème des accroissements finis, il existe $u \in]a;d[$ tel que

$$h(d) - h(a) = h'(u) \cdot (d-a)$$

Or, $h'(u) = f'(u) - g'(u) = 0$. Donc $h(d) - h(a) = 0$

$$\Rightarrow h(d) = h(a)$$

□

Le deuxième corollaire nous permettra d'étudier la croissance et la décroissance des fonctions réelles.

Corollaire 3.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a,b[$. Alors f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.*

Démonstration. Clairement, si f est croissante, le signe de la dérivée sera positif. En effet,

$\forall c \in]a,b[$, $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ car $x \geqslant c \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(c)$

Pour la réciproque, supposons donc que $f'(x) \geq 0$ pour tout $a < x < b$. Soit $u < v$ deux points de l'intervalle $[a,b]$. Par le Théorème des accroissements finis,

$\exists c \in]u,v[$ tel que $f(v) - f(u) = f'(c) \cdot (v-u)$

Comme $u < v$ et $f'(x) \geqslant 0$ $\forall x \in]a,b[$, $f'(c) \cdot (v-u) \geqslant 0$

Donc $f(v) - f(u) \geqslant 0 \Rightarrow f(v) \geqslant f(u)$

$\Rightarrow$ f est croissante. □

L'analogue pour les fonctions décroissantes se trouve ... en exercice !

4 La règle de Bernoulli-L'Hospital

Nous arrivons à l'un des moments phare de ce chapitre. Il s'agit d'une règle de calcul de limite de quotient qui nous simplifiera la vie de manière phénoménale. La démonstration que nous verrons la semaine prochaine se base sur une généralisation du Théorème des accroissements finis.

Théorème 4.1. *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues définies sur un intervalle fermé et dérivables en tout point de $]a, b[$. On suppose que g' ne s'annule en aucun point de $]a, b[$. Il existe alors un point $a < c < b$ tel que* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que l'hypothèse sur la dérivée de g implique que $g(b)-g(a) \neq 0$ et l'énoncé fait donc sens. Considérons alors la fonction

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

On calcule $h(a) = \underbrace{f(a) - f(a)}_{=0} - (\underbrace{g(a) - g(a)}_{=0}) \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = 0$

et $h(b) = f(b) - f(a) - (\cancel{g(b) - g(a)}) \dfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}} = 0$

On peut ainsi appliquer le théorème de Rolle :

$\exists\, c \in]a;b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Or, $h'(c) = f'(c) - g'(c) \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = 0$

$$\iff f'(c) = g'(c) \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

Théorème 4.2. de Bernoulli-L'Hospital.
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues définies sur un intervalle fermé et dérivables en tout point de $]a, b[$. On suppose que g et g' ne s'annulent en aucun point de $]a, b[$. Alors, si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x)$ vaut zéro ou plus ou moins l'infini,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pour autant que cette dernière limite existe.

Nous démontrerons ce résultat la semaine prochaine et en voyons une application spectaculaire en comparaison avec le calcul fastidieux fait l'année passée.

Exemple 4.3. Considérons les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x$ sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$$

$$= 1$$