Remarques :
- $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ est toujours surjective.
- Si $f : X \to Y$ injective alors $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective

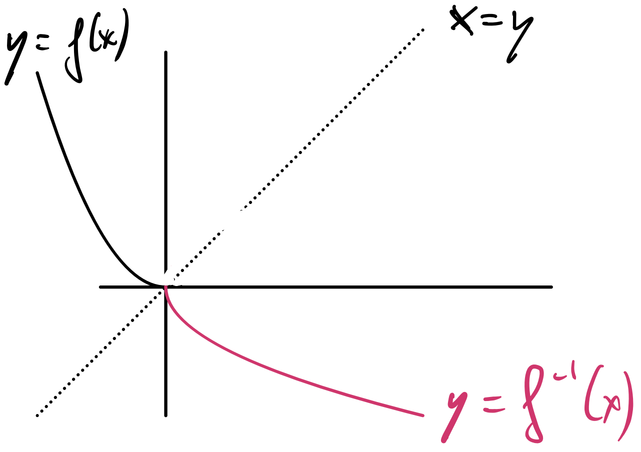
Def/prop : (fonction réciproque). Si $f : X \to Y$ est bijective alors elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : Y \to X$ telle que

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{ssi} \quad f(x) = y$$

On a donc : $\forall y \in Y, f(f^{-1}(y)) = y$ et $\forall x \in X, f^{-1}(f(x)) = x$

Exemple : $f : \left| \begin{array}{l} \overset{= \{x \in \mathbb{R} ; x \leq 0\}}{\mathbb{R}_-} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$

$f^{-1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_- \\ x \mapsto -\sqrt{x} \end{array} \right.$



↓ fin cours 26/09

Def (composition de fonctions)

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. La composition de g par f (aussi appelée "f suivie de g"), notée $g \circ f$ est la fonction $g \circ f : X \to Z$ définie par

$$\forall x \in X, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Compositions multiples :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & Z \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

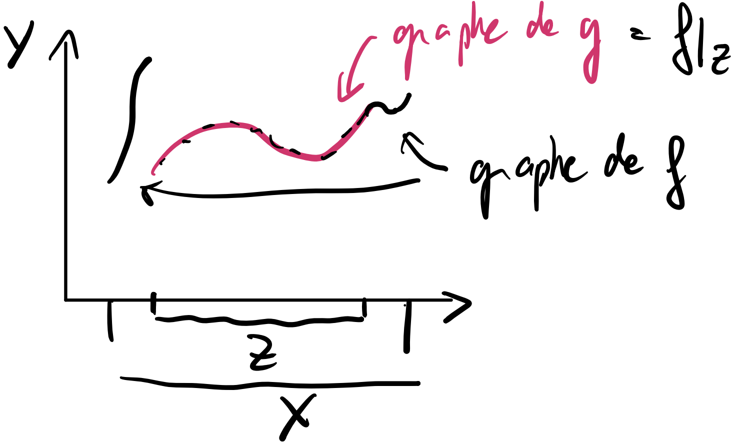
Manifestement, on a $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ on note cette fonction $h\circ g\circ f$.

⇝ on peut sans ambiguïté enlever les parenthèses : la composition est dite associative

Restriction et prolongement de fonctions

Soit $f : X \to Y$ et $g : Z \to Y$ avec $Z \subset X$ et telles que $\forall x \in Z$, $f(x) = g(x)$.

- On dit que g est la restriction de f à Z, notée $f|_Z$
- On dit que f est un prolongement de g à X.



0.2 Nombres entiers et rationnels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)

Entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$(\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\})$

Remarque : Trouver $x \in \mathbb{N}$ tel que $2 + x = 1$? Pas de solution.

Entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Pour aller plus loin : construction de $\mathbb{Z}$

On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation :

$$(m, n) \sim (p, q) \quad \text{ssi} \quad \cancel{m - n = p - q}$$

pas possible car fait intervenir les nombres relatifs, que l'on souhaite justement construire !

$$m + q = p + n$$

On peut montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

On peut voir $\mathbb{Z}$ comme étant $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$.

- On a $2 + x = 1$ a bien une solution $x \in \mathbb{Z}$, donnée par $-1 \in \mathbb{Z}$ (représente la classe d'équivalence $-1 \text{ "=" } \{(0,1), (1,2), (2,3), \dots\}$)
- Par contre $2 \cdot x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Nombres rationnels $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} \text{ "=" } \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Pour aller plus loin : construction de $\mathbb{Q}$.

Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on note $(p, q) \equiv \frac{p}{q}$. On a la relation d'équivalence :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \quad \overset{\text{si et seulement si}}{\text{ssi}} \quad ad = cb$$

(vérifier que c'est bien une relation d'équivalence)

On écrit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, c'est à dire que l'on peut voir $\mathbb{Q}$ comme un ensemble quotient : $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$

- **Addition :** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- **Multiplication :** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

} compatibles avec la relation d'équivalence.

- Tout nombre rationnel s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible : $x = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.

pas de diviseur commun plus grand que 1

- cette écriture est unique.

"Problème" : $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration :

- Soit $x \in \mathbb{Q}$. On a $x = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux.
- Supposons que $x^2 = 2$.
- On a

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow p^2 \text{ est pair}$$

$$\Rightarrow p \text{ est pair}$$

$$\Rightarrow p = 2a \text{ avec } a \in \mathbb{Z}$$

On déduit de $(*)$ que $(2a)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2a^2 = q^2$

$$\Rightarrow q^2 \text{ est pair}$$

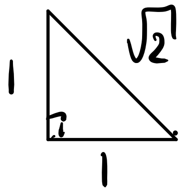
$$\Rightarrow q \text{ est pair}$$

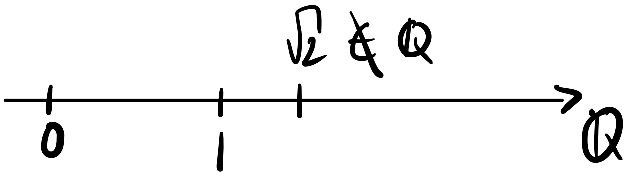
Ceci contredit que p et q sont premiers entre eux (car p et q sont pairs)

Donc on a une contradiction.

Nécessairement $x \in \mathbb{Q}$ implique $x^2 \neq 2$. ■

fin de preuve





(il y a des trous dans $\mathbb{Q}$)

0.3 Logique et technique de preuve

0.3.1 Logique

Proposition : affirmation qui est soit vraie (V) soit fausse (F)

- "$2+4=10$"   Faux
- "$\exists x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2=2$"   Faux

(s'écrit $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$) "tel que" est souvent sauté

- C'est phrase n'a pas de verbe : pas une proposition (grammaire, autoréférence, variables non définies...)

Soient A et B des propositions :

A et B : vraie ssi A vraie et B vraie

A ou B : vraie ssi A vraie et/ou B vraie

non(A) : vraie ssi A fausse.

(parfois noté $\neg A$)

Table de vérité :

A	B	A et B	A ou B	non A
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Exemple : Non("Tous les moutons sont blancs")

= "Il existe un mouton qui n'est pas blanc"

- Ordre des quantificateurs "$\exists$" et "$\forall$" :

(i) Tout le monde aime au moins une boisson, l'eau.

(ii) Tout le monde aime au moins une boisson, moi j'aime le panaché.

Cette phrase est ambiguë

Désambiguïation :

(i) $\exists$ une boisson, B telle que $\forall$ personne P, P aime B.

(ii) $\forall$ personne P, $\exists$ une boisson B, P aime B.

Exercice de négation :

non (i) : $\forall$ boisson B, $\exists$ personne P, P n'aime pas B.

non (ii) : $\exists$ personne P, $\forall$ boisson B, P n'aime pas B.

Implication et équivalence

Soit A et B deux propositions.

$A \Rightarrow B$ signifie "A implique B", "Si A alors B"

$A \Leftrightarrow B$ signifie "A équivalent à B"

Table de vérité :

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Exemple : A : j'ai mon parapluie

B : il pleut

(*) $A \Rightarrow B$: si j'ai mon parapluie alors il pleut.

("$\Rightarrow$" est différent de la notion de causalité)

0.3.2 Techniques de preuve

(i) Par l'absurde : pour montrer A, on montre $\text{non}(A) \Rightarrow \text{Faux}$

(vérifier $A \Leftrightarrow [\text{non}(A) \Rightarrow \text{Faux}]$ à l'aide d'une table de vérité)

(ii) Par contraposée : pour montrer $A \Rightarrow B$, on montre non$(B) \Rightarrow$ non(A).

(vérifier : $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)]$ sur une table de vérité)

Contraposée de (*) : "s'il ne pleut pas alors je n'ai pas mon parapluie"

(iii) Par récurrence :

Theorème : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un énoncé qui dépend de n tel que :

- $P(n_0)$ est vrai ← (initialisation)
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie (hérédité)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ on a $P(n)$ est vraie.

Fin cours 29/09/2022