EPFL — Cours Euler 28.09.2022
Deuxième année

Série 6

Exercice 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie ta réponse (si une affirmation est fausse, donne un exemple où le résultat contredit l'affirmation, et si elle est vraie, démontre-la).

a) Lorsqu'on multiplie deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ on obtient toujours un produit $h(x)$ de degré supérieur au degré de $f(x)$ et au degré de $g(x)$.

b) Lorsqu'on multiplie deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ on obtient toujours un produit $h(x)$ de degré supérieur au degré de $f(x)$ ou au degré de $g(x)$.

c) Lorsqu'on divise un polynôme par un polynôme de même degré le quotient est toujours une constante (un polynôme de degré zéro).

Exercice 2. Pour chacun des cas suivants, divise le premier polynôme donné par le second, et donne l'égalité fondamentale de la division.

a) $x^2 + 5x + 8$ et $x + 3$;

b) $4x^2 - 6x + 1$ et $2x - 1$;

c) $x^3 - x + 12$ et $x - 4$;

d) $6x^4 + x^2 + 1$ et $2x^2 + 1$;

e) $x^4 - 2x^3 - 7x + 3$ et $x^2 + x + 2$.

Exercice 3. Utilise la division euclidienne de polynômes pour trouver le quotient et le reste de la division de $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4x - 3$ par $x + 2$. Utilise l'égalité fondamentale pour calculer $f(-2)$. Calcule aussi $f(-2)$ par substitution pour vérifier ta réponse.

Exercice 4. Utilise la division euclidienne pour calculer $f(a)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 1$ et $a = 1$;

b) $f(x) = x^3 + 2x + 3$ et $a = 3$;

c) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 8$ et $a = -2$;

d) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 4$ et $a = -8$;

e) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 9$ et $a = 9$.

Exercice 5. Utilise la division euclidienne pour déterminer si a est une racine de $f(x)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$ et $a = 2$;

b) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + 7x + 1$ et $a = -4$;

c) $f(x) = 8x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x - 1$ et $a = \frac{1}{2}$;

d) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 17x + 6$ et $a = -6$.

Exercice 6. Détermine une valeur de k pour laquelle $x + 1$ est un facteur de $kx^3 + 2x^2 - 3x + 4$.

Exercice 7. Associe chaque polynôme avec sa forme factorisée.

a) $4x + xy$	**a)** $3xy(2x + 5y^2)$
b) $3x + 12$	**b)** $x^2(x + 3z + 4)$
c) $xy^2 + 5y^2z$	**c)** $7(3y - 2)$
d) $21y - 14$	**d)** $-2(2x + y)$
e) $-4x - 2y$	**e)** $8(2x + 3y + 1)$
f) $8x^2z + 4z$	**f)** $y^2(x + 5z)$
g) $-18xy - 12x$	**g)** $3(4 + x)$
h) $6x^2y + 15xy^3$	**h)** $-5(xyz + 2z + 3)$
i) $16x + 24y + 8$	**i)** $4z(2x^2 + 1)$
j) $x^3 + 3x^2z + 4x^2$	**j)** $x(4 + y)$
k) $-5xyz - 10z - 15$	**k)** $-6x(3y + 2)$

Exercice 8. Factorise les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[x]$ en utilisant des identités remarquables :

a) $f(x, y) = 8x^3 + 27y^3$;

b) $f(x, y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2$;

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{125}x^3 - \frac{3}{10}x^2yz + \frac{15}{4}xy^2z^2 - \frac{125}{8}y^3z^3$;

d) $f(x, y) = 6x^2 - 24y^2$;

e) $f(s, t) = 81s^2 - 72st + 64t^2$.