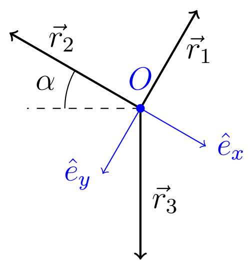
Exercices préparatoires de mécanique – CGC

Ces exercices mettent en application, dans des cas simples, les notions et exemples vus au cours. Ils sont donc à faire avant les problèmes proposés en séance d'exercice.

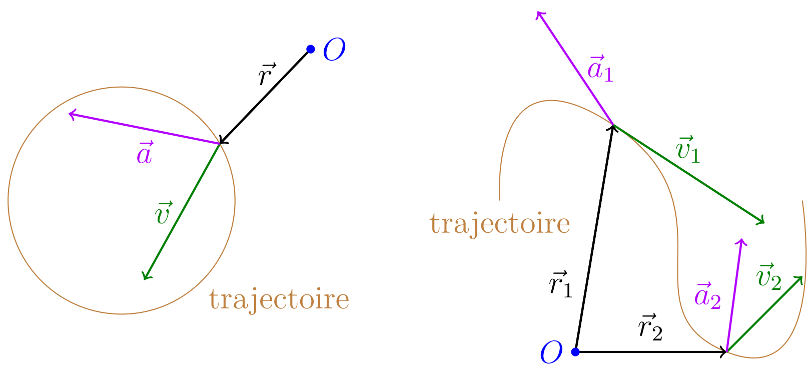
Série 3 : oscillations, systèmes de coordonnées

1. **Référentiel, repère, vecteur position**
   Dans le plan de la feuille, on donne un repère $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$ et trois vecteurs position $\vec{r}_i$ dessinés à taille réelle.



   Exprimer les composantes des vecteurs $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_3$ dans la base $(\hat{e}_x, \hat{e}_y)$.
   L'angle α vaut $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. On admet que chaque vecteur unitaire mesure 1 cm.

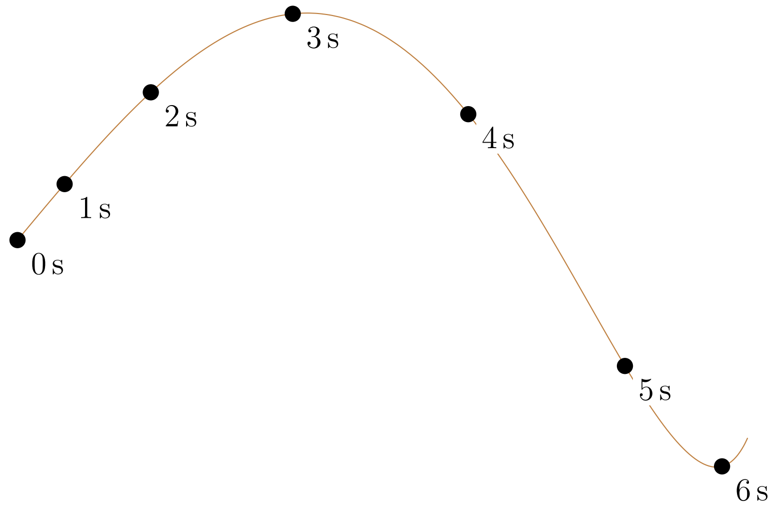
2. **Vecteur position, vitesse et accélération**
   On considère les trajectoires de deux objets représentées ci-dessous.



   Les vecteurs position, vitesse et accélération indiqués sur la figure sont-ils réalistes ? Pour chacun d'eux expliquer pourquoi.

3. **Vecteurs vitesse et accélération**

   Sur la figure ci-dessous, on a représenté la trajectoire d'un objet et la position de ce dernier aux instants $t = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 s. On admet que la vitesse varie de façon monotone entre deux instants représentés successifs.



   En visualisant le mouvement de l'objet, dessiner approximativement, à chacun de ces instants,
   - les vecteurs vitesse,
   - les vecteurs accélération tangentielle,
   - les vecteurs accélération normale.

4. **Accélérations normale et tangentielle**

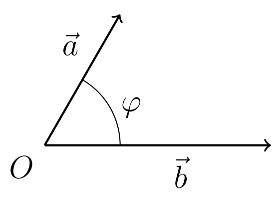
   Un conducteur à l'arrêt veut effectuer un quart de tour sur une route. Sa trajectoire est un arc de cercle de rayon 4 m, et le compteur de son véhicule indique que sa vitesse augmente de 3 m/s à chaque seconde.

   (a) Quelle est l'accélération tangentielle du véhicule pendant la manœuvre ?

   (b) Combien de temps met le véhicule pour faire un quart de tour ?

   (c) Quelle est la vitesse, l'accélération normale et l'accélération tangentielle du véhicule après un quart de tour ?

5. **Produit scalaire**



   Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace.

   $$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\, ||\vec{b}||\, \cos \varphi}$$

   où φ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

   Pour chacune des questions ci-dessous, faire une esquisse et donner la réponse en fonction de $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

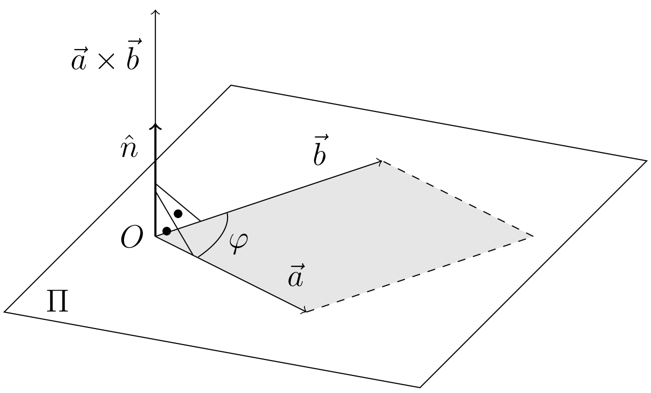
   (a) Donner la longueur de la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

   (b) Donner le vecteur obtenu par projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$. Dans quel cas cette projection pointe-t-elle dans un sens opposée à $\vec{a}$?

   (c) Soit $\vec{r}$ un vecteur quelconque de l'espace. A quelle condition doit-il satisfaire pour être normal à $\vec{a}$? Quel est alors le lieu des points M repérés par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$?

   (d) Soit $\vec{r}$ un vecteur quelconque de l'espace. A quelle condition doit-il satisfaire pour former un angle α donné avec $\vec{a}$? Quel est alors le lieu des points M repérés par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$?

6. **Produit vectoriel**



Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \, |\sin\varphi| \, \hat{n}}$$

où φ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, de sens donné par la règle du tire-bouchon (ou des trois doigts, ou de la main droite).

Pour chacune des questions ci-dessous, faire une esquisse et donner la réponse à l'aide de $\vec{a} \times \vec{b}$ (et éventuellement de $\vec{a} \cdot \vec{b}$).

(a) Donner l'aire du parallélogramme défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

(b) En prenant $\vec{b}$ comme base, donner la hauteur de ce parallélogramme.

(c) Déterminer les vecteurs définissant un rectangle dans le plan $(O, \vec{a}, \vec{b})$, de base $\vec{b}$ et de même aire que celle du parallélogramme.

(d) Soit $\vec{r}$ un vecteur quelconque de l'espace. Quel est le lieu des points M repérés par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ sous la condition $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$?

(e) Soit $\vec{r}$ un vecteur quelconque de l'espace. Quel est le lieu des points M repérés par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ sous la condition $||\vec{r} \times \vec{b}|| = ||\vec{a} \times \vec{b}||$?