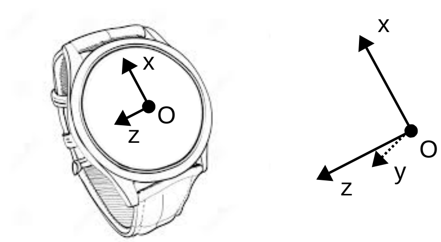
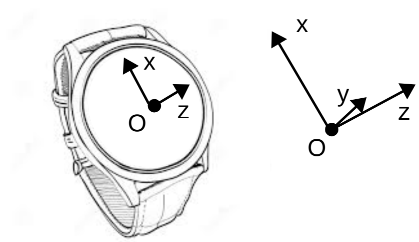
Corrigé Série 03 : Oscillations et systèmes de coordonnées

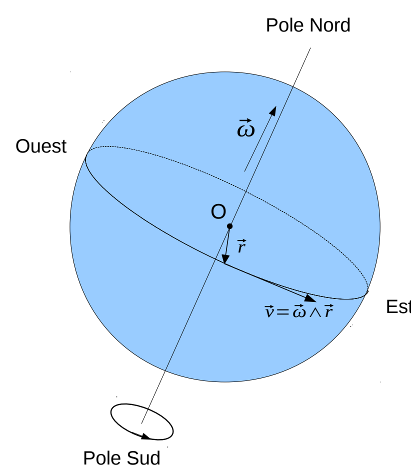
Questions conceptuelles

a) Pour former un repère orthonormé droit $Oxyz$ avec les axes x et z, l'axe y doit être perpendiculaire aux deux axes x et z. Il est donc perpendiculaire au plan du cadran de la montre. A 9h, l'axe y est dirigé vers l'arrière de la montre, alors qu'à 15h il est dirigé vers l'avant de la montre.





b) Puisque le soleil apparait à l'est et se couche à l'ouest, la terre tourne d'ouest en est (cf $\vec{v}$ sur le schéma). Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est défini tel que : $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. La direction de $\vec{\omega}$ définit l'axe de rotation de la terre, et son sens le sens de rotation de la terre. En utilisant la règle de la main droite, on obtient un vecteur de vitesse angulaire dirigé du pôle sud au pôle nord.



1 Trajectoire elliptique

a) Le vecteur position du point matériel est

$$\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\hat{\imath} + B\sin(\omega t)\hat{\jmath}. \tag{1}$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et de demi-axes A et B selon les directions x et y centrée sur l'origine O, en effet, les coordonnées x et y du vecteur $\vec{r}$ satisfont l'équation

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse de demi-axes A et B. L'équation (1) représente le mouvement horaire d'un point matériel se déplaçant sur cette ellipse. Le vecteur vitesse est donné par

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega A\sin(\omega t)\hat{\imath} + \omega B\cos(\omega t)\hat{\jmath}.$$

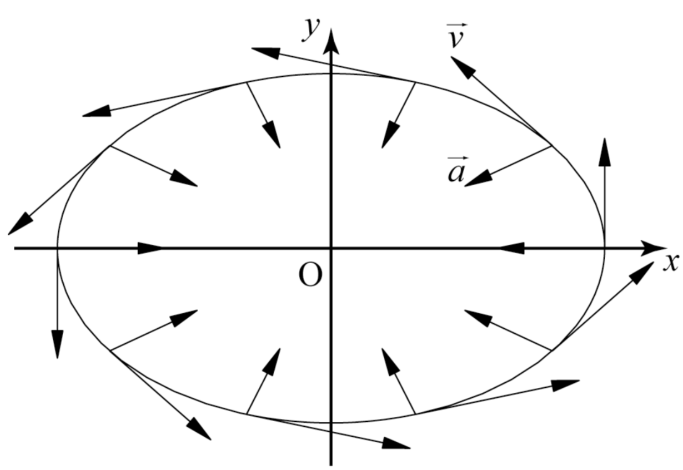
Il est toujours tangent à la trajectoire (c'est-à-dire à l'ellipse).
Le vecteur accélération est donné par

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t)\hat{\imath} - \omega^2 B\sin(\omega t)\hat{\jmath}. \tag{2}$$

Ce dernier peut se ré-écrire

$$\vec{a}(t) = -\omega^2\vec{r}(t).$$

Il s'agit d'un vecteur colinéaire à $\vec{r}(t)$, dirigé dans le sens opposé. Il pointe donc vers l'origine O du repère. (Voir schéma).



Pour montrer que $\vec{r}(t)$ n'est en général pas orthogonal à $\vec{v}(t)$, on calcule leur produit scalaire :

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = -A^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + B^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = (B^2 - A^2)\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t).$$

Cette expression n'est pas nulle si $A \neq B$ (sauf dans les cas particuliers $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$), et donc les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

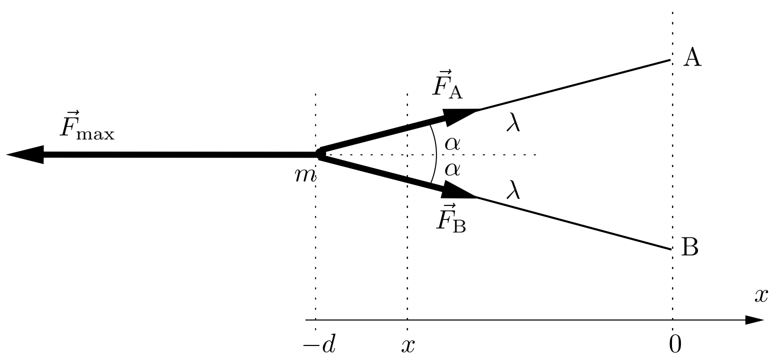
b) Pour écrire la force qui détermine ce mouvement, on utilise la loi de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}(t) = -m\omega^2\vec{r}(t) \tag{3}$$

c) D'après l'équation (3), cette force est linéairement proportionelle à la distance à l'origine $|\vec{r}(t)|$, parallèle au vecteur $\vec{r}(t)$ et de sens opposé. Il s'agit d'une force de rappel, telle celle produite par un ressort de longueur au repos nulle dont une extremité est fixée à l'origine et l'autre sur le point matériel. La force gravitationnelle est, elle, inversément proportionelle au carré de la distance. Il est à noter que les deux forces produisent un mouvement elliptique. Dans cet exercice, la force est située au centre de l'ellipse. Dans le cas de la gravitation (mouvement des planètes, par exemple), il sera vu que la force est située sur un des foyers de l'ellipse.

2 Lance-pierre

a) Lorsque Bart Simpson tient la pierre immobile en $x = -d$ en lui appliquant une force $\vec{F}_{\mathrm{max}}$, la somme vectorielle des forces subies par la pierre doit être nulle. On a



$$\vec{F}_{\mathrm{max}} + \vec{F}_{\mathrm{A}} + \vec{F}_{\mathrm{B}} = \vec{0}\,, \tag{4}$$

où $\vec{F}_{\mathrm{A}}$ et $\vec{F}_{\mathrm{B}}$ sont les forces que les deux moitiés de l'élastique exercent sur la pierre. En projection sur l'axe x on a

$$F_{\mathrm{A},x} + F_{\mathrm{B},x} = F_{\mathrm{max}} \tag{5}$$

où F_{max} est la norme de $\vec{F}_{\mathrm{max}}$. Les normes de $\vec{F}_{\mathrm{A}}$ et $\vec{F}_{\mathrm{B}}$ sont égales à la tension de l'élastique, dont l'allongement vaut 2λ, donc

$$F = ||\vec{F}_{\mathrm{A}}|| = ||\vec{F}_{\mathrm{B}}|| = k\,2\lambda \tag{6}$$

où k est la raideur de l'élastique. Les composantes x de ces forces valent

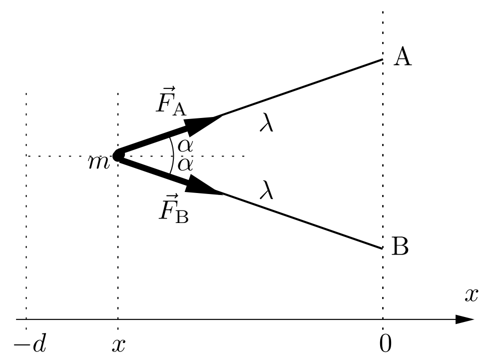
$$F_{\mathrm{A},x} = F_{\mathrm{B},x} = F\cos\alpha = 2k\lambda(d/\lambda) = 2kd. \tag{7}$$

En introduisant ce dernier résultat dans l'équation (5), on obtient

$$k = \frac{F_{\mathrm{max}}}{4d}. \tag{8}$$

b) L'équation (7) obtenue pour la position $x = -d$ est également valable lorsque la pierre se trouve à une position x quelconque ($-d \leq x \leq 0$), à condition de remplacer $-d$ par x. Ainsi

$$F_{\mathrm{A},x} = F_{\mathrm{B},x} = -2kx. \tag{9}$$



Pendant la phase de propulsion, $\vec{F}_\mathrm{A}$ et $\vec{F}_\mathrm{B}$ sont les seules forcées s'appliquant sur la pierre. En projetant la deuxième loi de Newton, $m\vec{a} = \vec{F}_\mathrm{A} + \vec{F}_\mathrm{B}$, sur l'axe x, on obtient

$$m\ddot{x} = F_{\mathrm{A},x} + F_{\mathrm{B},x} = -4kx = -\frac{F_\mathrm{max}}{d}x \tag{10}$$

$$\text{soit } \ddot{x} + \frac{F_\mathrm{max}}{md}x = 0, \tag{11}$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F_\mathrm{max}}{md}}. \tag{12}$$

La solution générale est

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad [\text{ou bien } C\sin(\omega_0 t + D)], & (13)\\ v(t) = \dot{x}(t) &= -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \quad [\text{ou bien } C\omega_0\cos(\omega_0 t + D)]\,, & (14)\end{aligned}$$

où A et B [ou bien C et D] sont des constantes d'intégration.

c) On définit $t = 0$ au moment où la pierre a une vitesse nulle en $x = -d$. On a :

$$\begin{aligned} x(0) = A = -d & \qquad [\text{ou bien } C\sin D = -d], & (15)\\ v(0) = B\omega_0 = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 & \qquad [\text{ou bien } C\cos D = 0 \Rightarrow D = \pi/2 \text{ et } C = -d]. & (16)\end{aligned}$$

Ainsi, la solution particulière est

$$\begin{aligned} x(t) &= -d\cos(\omega_0 t)\,, & (17)\\ v(t) &= d\omega_0\sin(\omega_0 t)\,. & (18)\end{aligned}$$

d) La pierre quitte le lance-pierre en $x = 0$ avec une vitesse v_0 au temps t_0, donc

$$\begin{aligned} x(t_0) &= -d\cos(\omega_0 t_0) = 0, & (19)\\ v(t_0) &= d\omega_0\sin(\omega_0 t_0) = v_0, & (20)\end{aligned}$$

ce qui implique $t_0 = \frac{\pi}{2\omega_0}$ et

$$d\omega_0 = v_0. \tag{21}$$

Cette dernière relation s'obtient aussi en notant que la vitesse de l'équation (18) doit être maximale à la position d'équilibre $x = 0$. On a finalement, en combinant (12) et (21) :

$$\omega_0 = \frac{v_0}{d} = \sqrt{\frac{F_{\max}}{md}}\,, \tag{22}$$

d'où

$$m = \frac{F_{\max} d}{v_0^2}. \tag{23}$$

Avec $d = 60$ cm, $F_{\max} = 150$ N et $v_1 = 30$ m/s, on obtient

$$m = \frac{150 \times 0.6}{30^2} = \frac{90}{900} = 0.1 \text{ kg}. \tag{24}$$

Alternative utilisant la conservation de l'énergie mécanique :
La force de l'élastique (qui est la seule force s'exerçant sur la pierre pendant la phase de propulsion) est conservative et dérive de l'énergie potentielle $V = \frac{1}{2}kL^2$, où L est l'allongement de l'élastique, c'est-à-dire la longueur de l'élastique (puisque la longueur à vide est nulle). Au moment où la pierre est lâchée en $x = -d$ (voir figure du point a) *ci-dessus), la longueur de l'élastique vaut 2λ. Au moment où la pierre arrive en $x = 0$ avec une vitesse v_0, la longueur de l'élastique vaut $2\sqrt{\lambda^2 - d^2}$. Ainsi, la conservation de l'énergie mécanique de la pierre implique*

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\left(2\sqrt{\lambda^2 - d^2}\right)^2 = \frac{1}{2}k\,(2\lambda)^2 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{4kd^2}{v_0^2}\,. \tag{25}$$

En remplaçant k par sa valeur obtenue à l'équation (8), on obtient alors l'équation (23).

Remarque :
Dans ce problème, il était important de démontrer que la force du ressort est proportionnelle à x, c'est-à-dire que le mouvement est harmonique. En effet, ceci n'est pas du tout garanti par le simple fait que le lance-pierre est formé d'un élastique. Pour que le mouvement de la pierre soit celui d'un oscillateur harmonique, il était crucial que la longueur au repos de l'élastique soit nulle. Voyons ce qui se passe si la longueur à vide de l'élastique ℓ_0 est non nulle, disons égale à la moitié de la distance $\overline{AB}$. En se référant à la figure du point b) *ci-dessus, où maintenant $\lambda = \sqrt{x^2 + \ell_0^2}$, on a*

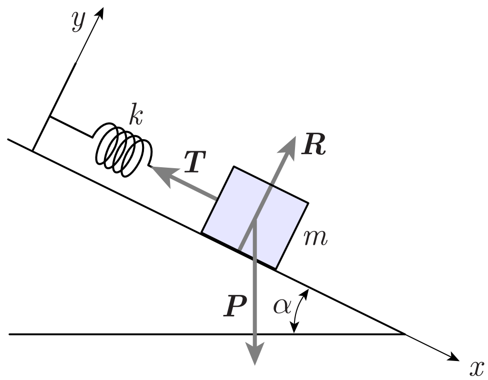
$$\begin{aligned} F = ||\vec{F}_\mathrm{A}|| = ||\vec{F}_\mathrm{B}|| &= k\,(2\lambda - \ell_0)\,, && (26)\\ F_{\mathrm{A},x} = F_{\mathrm{B},x} = F\cos\alpha &= k(2\lambda - \ell_0)(-x/\lambda) = -2kx(1 - \ell_0/(2\lambda)) && (27)\\ &= -2kx\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{(x/\ell_0)^2 + 1}}\right). && (28) \end{aligned}$$

L'équation du mouvement est alors

$$m\ddot{x} = F_{\mathrm{A},x} + F_{\mathrm{B},x} = -4kx\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{(x/\ell_0)^2 + 1}}\right)\,, \tag{29}$$

qui n'est certainement pas celle d'un oscillateur harmonique (sauf si $\ell_0 \to 0$).

3 Oscillateur sur plan incliné



Référentiel, repère et système : On choisit comme référentiel le plan incliné et comme repère l'axe de coordonnée $\boldsymbol{e}_x$ d'origine O parallèle au plan incliné dirigé vers le bas et l'axe de coordonnée $\boldsymbol{e}_y$ perpendiculaire au plan incliné dirigé vers le haut. Le système est le point matériel de masse m.

a) Bilan des forces :
   - Poids : $\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = mg\,(\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_x - \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_y)$
   - Réaction normale : $\boldsymbol{R} = R\,\boldsymbol{e}_y$
   - Traction du ressort : $\boldsymbol{T} = -\,k\,(x - l_0)\,\boldsymbol{e}_x$ où l_0 est la longueur du ressort à vide.

   Equation du mouvement : $\Sigma\,\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T} = m\,\boldsymbol{a}$.

b) Les projections de l'équation du mouvement selon les axes $\boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{e}_y$ donnent respectivement,

$$mg\sin\alpha - k\,(x - l_0) = m\ddot{x}\ , \tag{30}$$
$$R - mg\cos\alpha = 0 \tag{31}$$

A l'aide du changement de variable

$$z = x - l_0 - \frac{mg}{k}\sin\alpha\ , \tag{32}$$

l'équation différentielle (30) est mise sous la forme

$$m\ddot{z} + k\,z = 0\ , \tag{33}$$

qui est identique à l'équation (11) et décrit donc un mouvement harmonique oscillatoire de pulsation ω.

c) Compte tenu de l'expression de la pulsation ω, la période d'oscillation est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ . \tag{34}$$