Cinématique et dynamique du point matériel

https://wiki.epfl.ch/mooc-mecanique/

Analyse vectorielle : Cours 2, Leçon 2.2
Accélération normale et tangentielle : Cours 6, Leçon 6.1
Rotations : Cours 8
Coord. cylindriques et sphériques : Cours 7

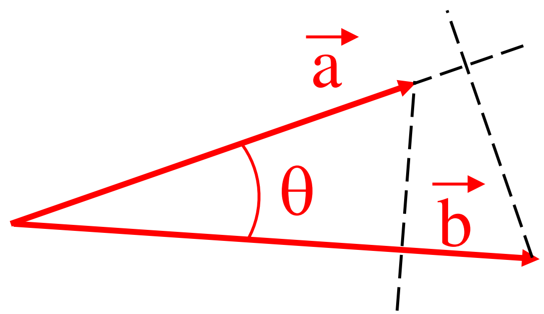
p 82, Section 2.2
p 14, Section 1.6, 1.7, 1.8

Référentiel (entité physique, et non mathématique)

Ensemble de N points ($N \geq 4$), non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres

- La description du mouvement se fait toujours par rapport à un certain référentiel !
- L'observateur et les appareils de mesure sont supposés immobiles par rapport au référentiel (ils « font partie » du référentiel)
- Le choix du référentiel est arbitraire, et il est indépendant de celui du repère et des coordonnées (le référentiel est un choix "physique", le repère un choix "mathématique")
- Exemples:
  - Le laboratoire (référentiel terrestre)
  - Le centre de la Terre et trois étoiles fixes (référentiel de Ptolémée)
  - Le centre du Soleil et trois étoiles fixes (référentiel de Képler)

Rappel mathématique: produit scalaire



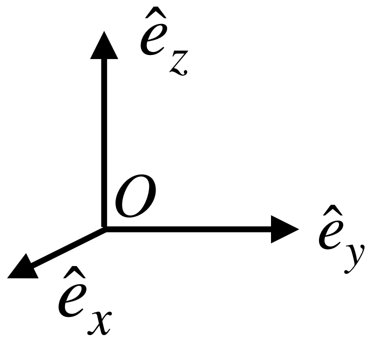
- Opération sur deux vecteurs qui produit un nombre (scalaire)

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \cos\theta}$$

- Propriétés
  - Commutativité
  - Distributivité
  - Linéarité
  - Vecteurs orthogonaux
  - Norme d'un vecteur

Rappel mathématique: Repère

Une origine (point O) et trois axes orthogonaux définis par des vecteurs de norme unité (vecteurs unitaires)



En particulier, un repère cartésien orthonormée vérifie :

- 3 vecteurs unitaires

$$\|\hat{e}_x\| = \|\hat{e}_y\| = \|\hat{e}_z\| = 1$$

- et orthogonaux entre eux

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_x = 0$$

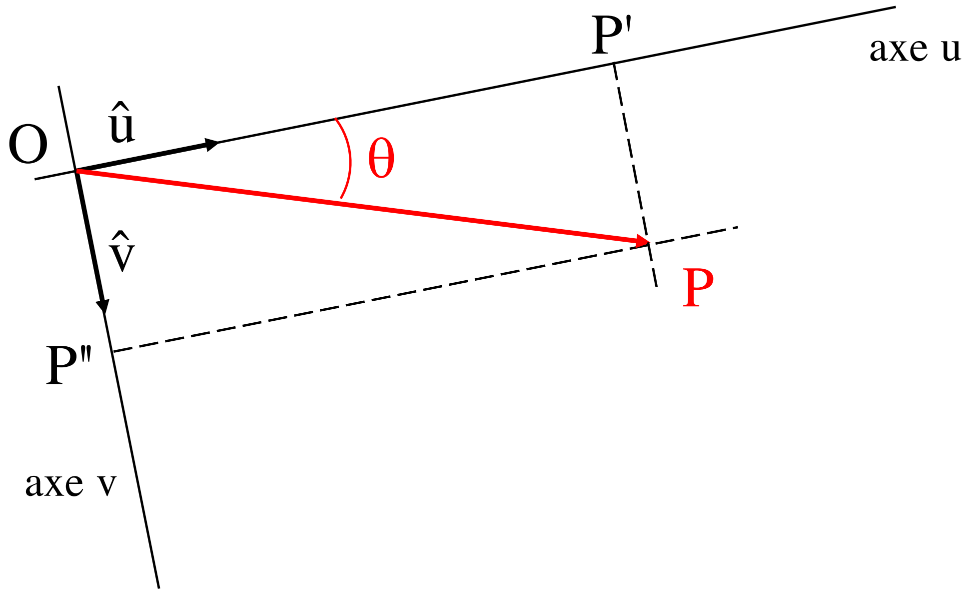
Remarque :

Ces deux relations se résument en

$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ (= 0 sinon)

(Kronecker delta)

Rappel mathématique: Composantes d'un vecteur, projections



- Projection du vecteur $\vec{OP}$ sur l'axe u

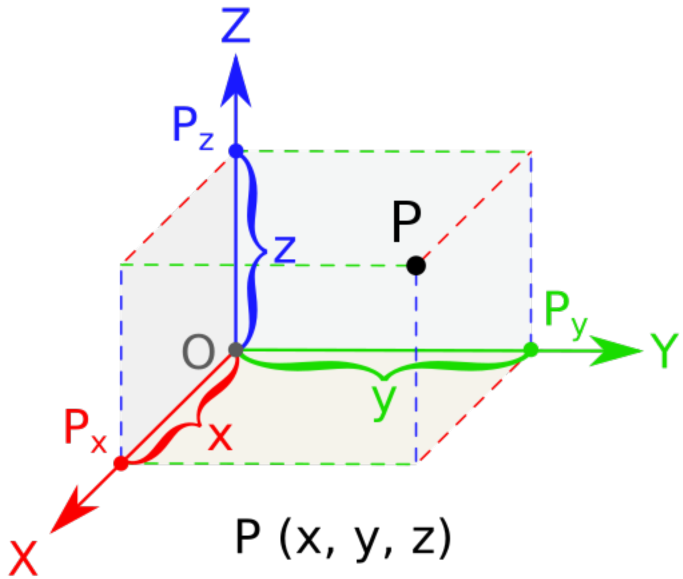
$$OP' = \vec{OP} \cdot \hat{u} = \|\vec{OP}\| \cos\theta$$

- Composantes du vecteur $\vec{OP}$ dans le repère $(\hat{u}, \hat{v})$

$$\vec{OP} = OP'\hat{u} + OP''\hat{v} = (\vec{OP} \cdot \hat{u})\hat{u} + (\vec{OP} \cdot \hat{v})\hat{v}$$

Rappel mathématique: Composantes d'un vecteur, projections

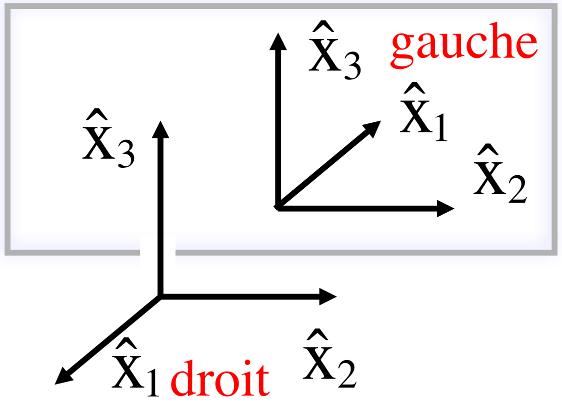
Les composantes sont les produits scalaires sur les vecteurs de base



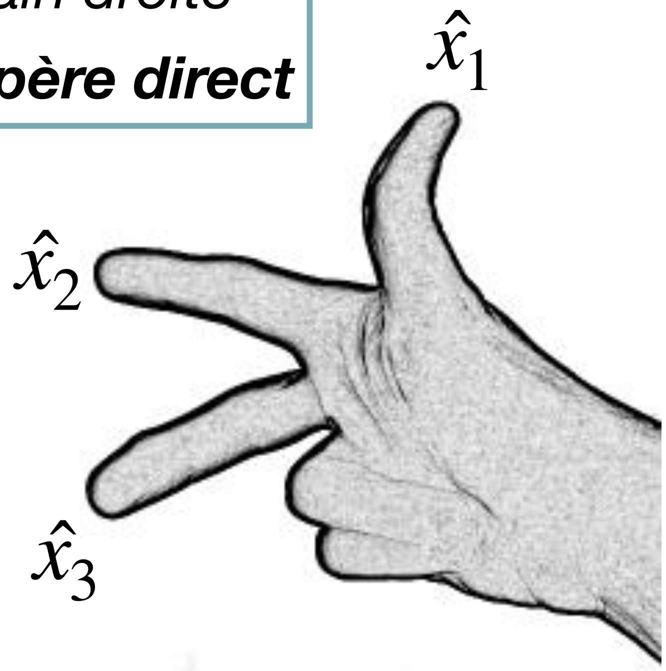
$$\begin{cases} x &= \vec{OP}\cdot\hat{x} \\ y &= \vec{OP}\cdot\hat{y} \\ z &= \vec{OP}\cdot\hat{z} \end{cases} \qquad \vec{OP} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rappel mathématique: Repère direct ou droit

- Convention sur l'orientation de l'espace ('chiralité')



Règle de la main droite
*=> Définie un **repère direct***



Un repère direct devient indirect par réflexion selon un plan (image miroir)

- Certains phénomènes naturels sont « chiraux »
  - les hélices d'ADN sont toujours gauches
  - Beaucoup de molécules organiques sont chirales : elles existent selon deux **énantiomères**, images miroir l'une de l'autre

Importance de la chiralité en pharmacie…

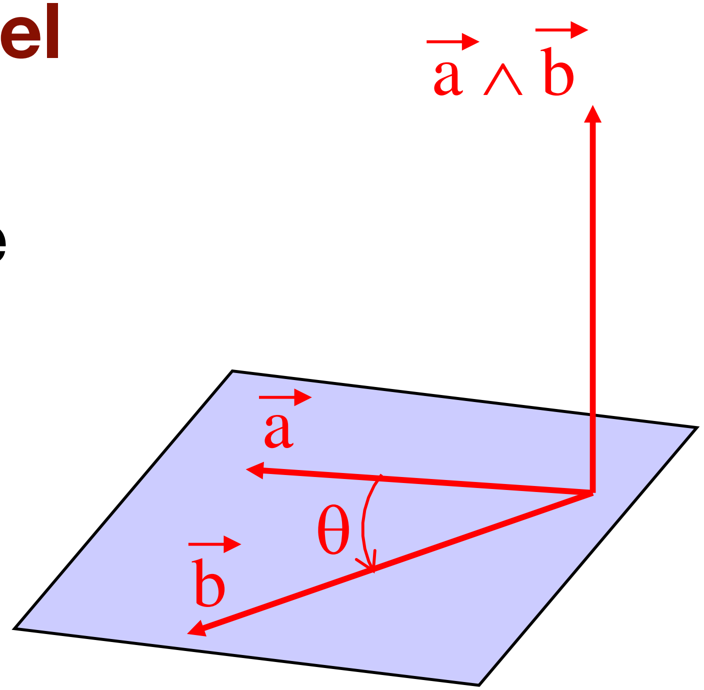
L'analyse et la séparation des énantiomères (qui forment la structure spatiale et fonctionnelle de notre environnement biotique et abiotique) sont capitales pour l'avancée des recherches dans la plupart des domaines scientifiques.

Près des 2/3 des molécules biologiquement actives chirales issues de synthèse classique (non énantiosélective) proviennent de dédoublements (séparation d'énantiomères), qui représentent l'une des principales voies d'accès aux composés énantiomériquement purs. La production des produits énantiopurs représentait aux États-Unis, en 1995, la somme colossale de près de 60 milliards de dollars.

Pour ces molécules, on appelle dans le vocabulaire pharmaceutique « eutomère » l'énantiomère le plus actif quant à l'effet recherché, l'autre étant appelé « distomère ». Ce dernier peut être moins actif, inactif, ou avoir un effet totalement différent, éventuellement indésirable. Dans le meilleur des cas c'est une charge que le foie devra métaboliser en plus du principe actif. Il arrive parfois que chaque énantiomère ait un intérêt pharmaceutique : par exemple le propoxyphène-(R) est un analgésique, commercialisé sous le nom de Darvon, et son énantiomère-(S) est un antitussif, vendu sous le nom en miroir de Novrad.

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89nantiom%C3%A9rie

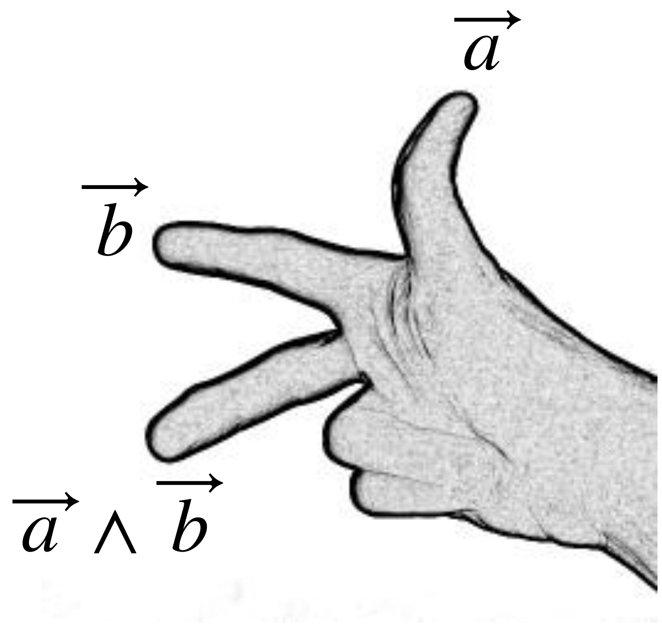
Rappel mathématique: produit vectoriel



- Opération sur deux vecteurs qui donne un autre vecteur
  - orthogonal aux deux vecteurs initiaux
  - de sens direct (règle main droite)
  - de norme $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin(\theta)$

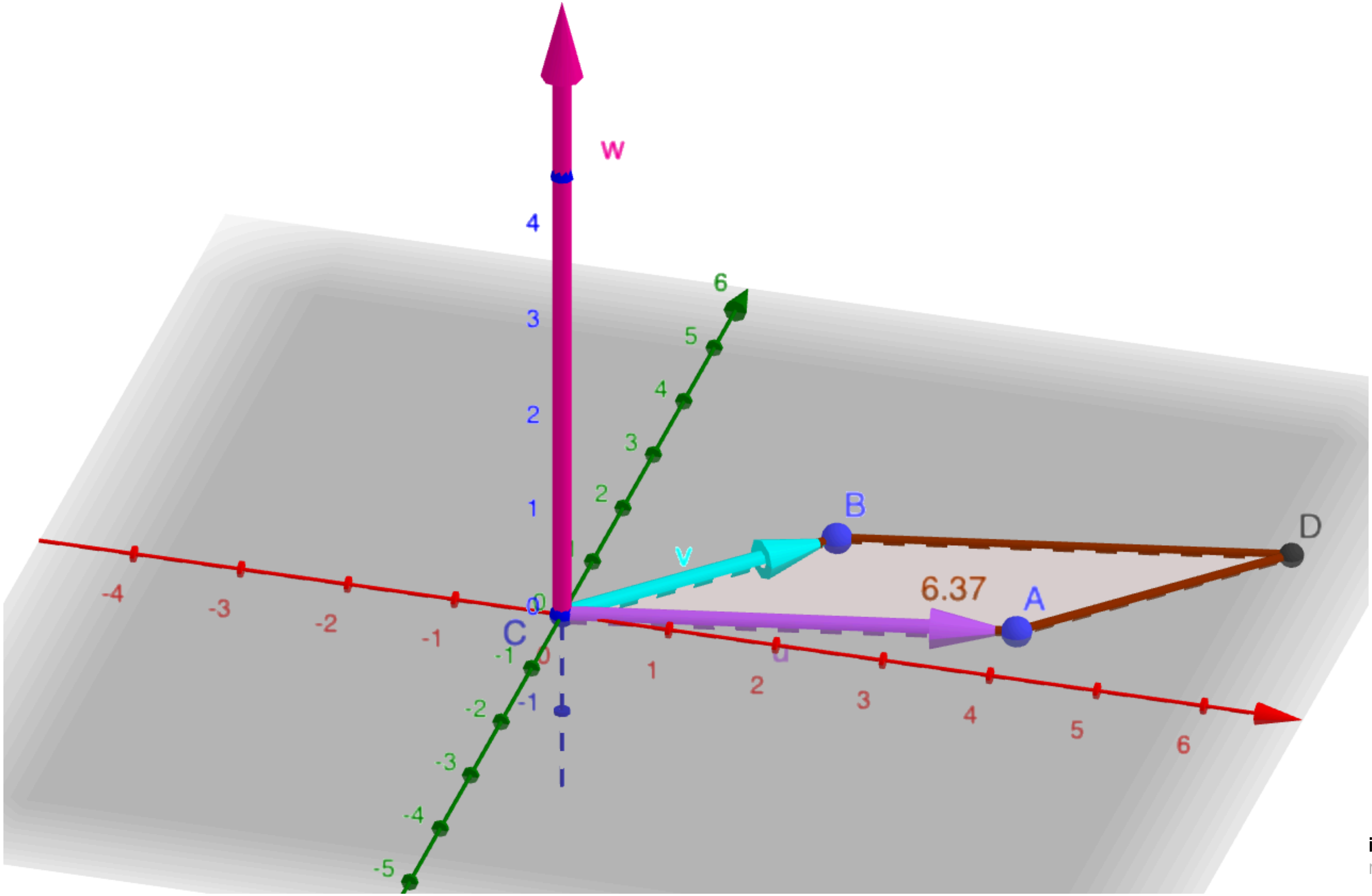
- Propriétés
  - Anti-Commutativité : $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\, \vec{a} \wedge \vec{b}$
  - Distributivité
  - Linéarité

- Si deux vecteurs sont colinéaires, leur produit scalaire est nul



Norme du produit vectoriel = aire du parallélogramme

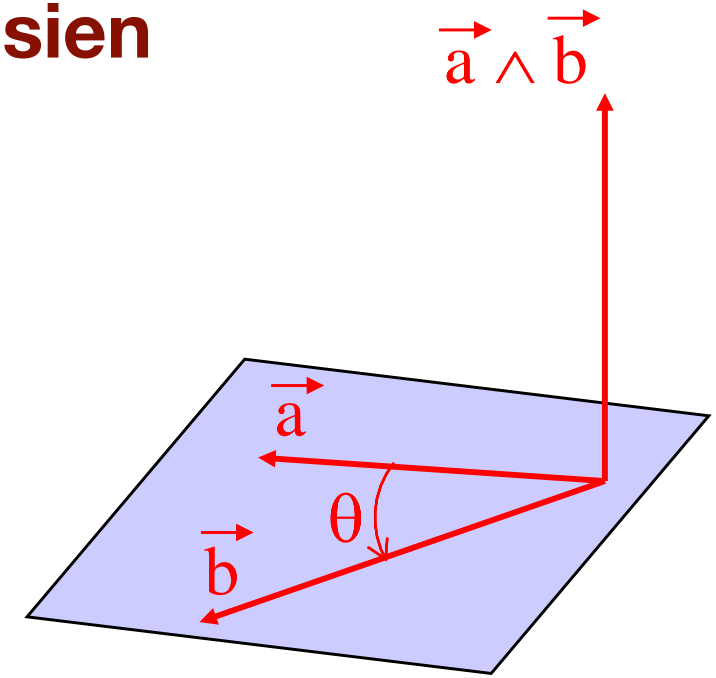
Animation : https://www.geogebra.org/m/hkyeqdnt



Composantes dans un repère cartésien orthonormé direct

- Composantes

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z bx - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



- Le résultat dépend de l'ordre d'écriture des termes
- Valable pour les composantes dans un repère direct

Complément

Double produit vectoriel

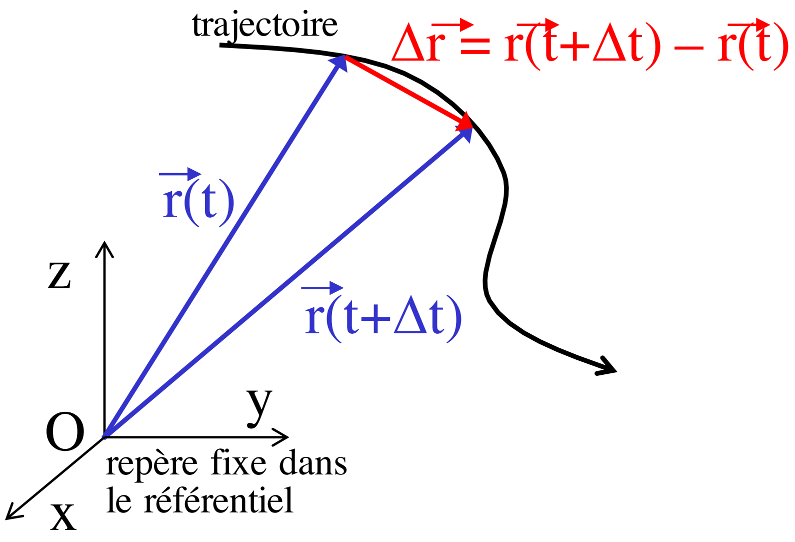
- Le produit vectoriel vérifie la propriété suivante

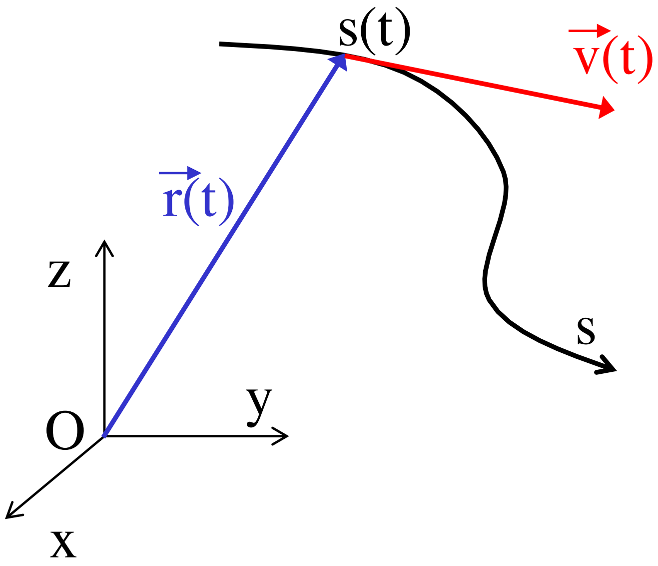
$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

- Identité de Jacobi

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$$

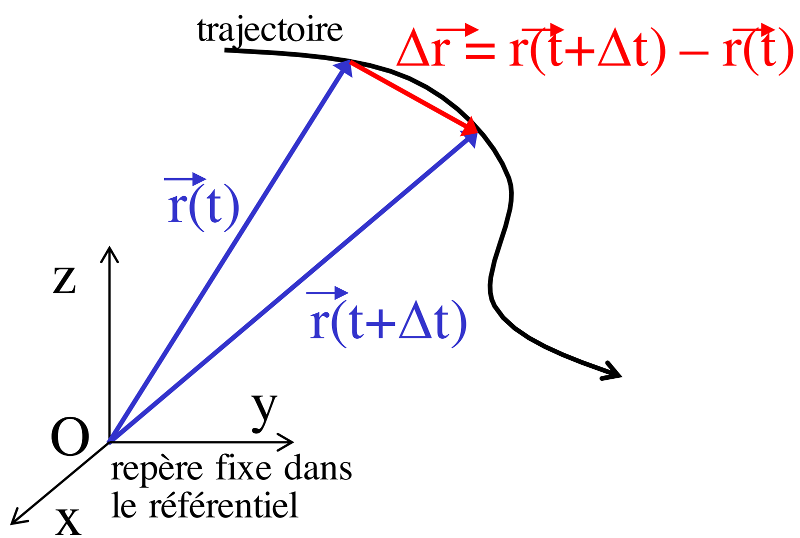
Cinématique du point matériel

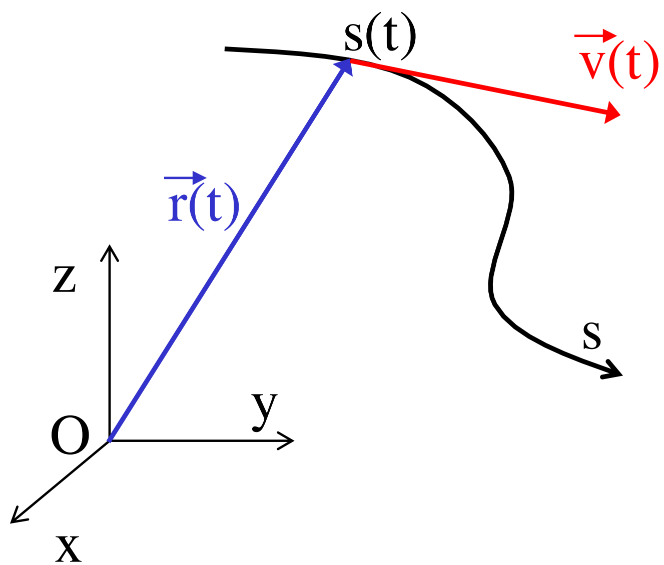




EPFL

Cinématique du point matériel





$\vec{r}(t) =$ position par rapport à O

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

= vitesse vectorielle instantanée (tangente à la trajectoire)

$s(t) =$ abscisse curviligne = longueur parcourue le long de la trajectoire

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \text{vitesse scalaire} = |\vec{v}(t)|$$

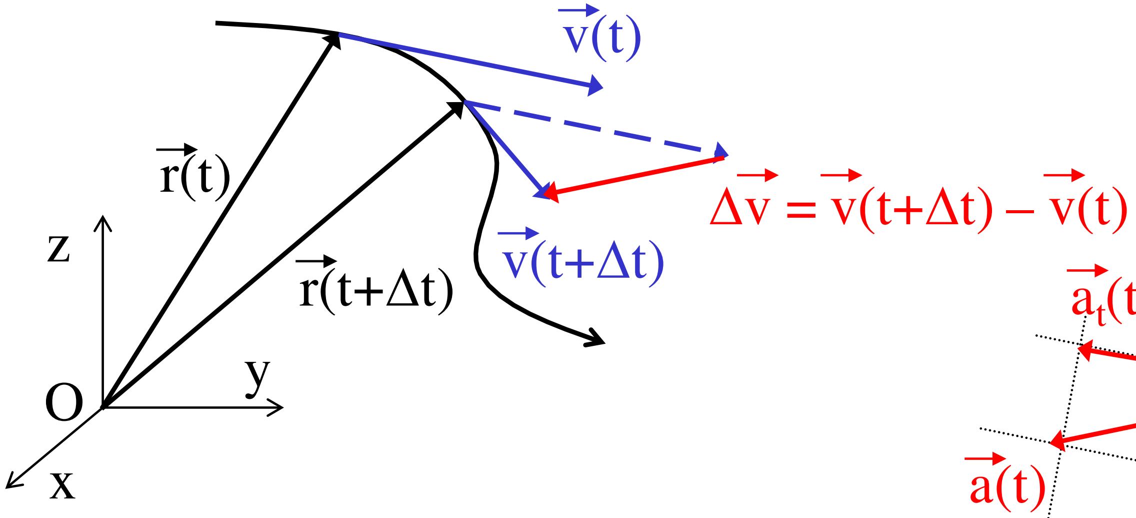
Avec $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$:

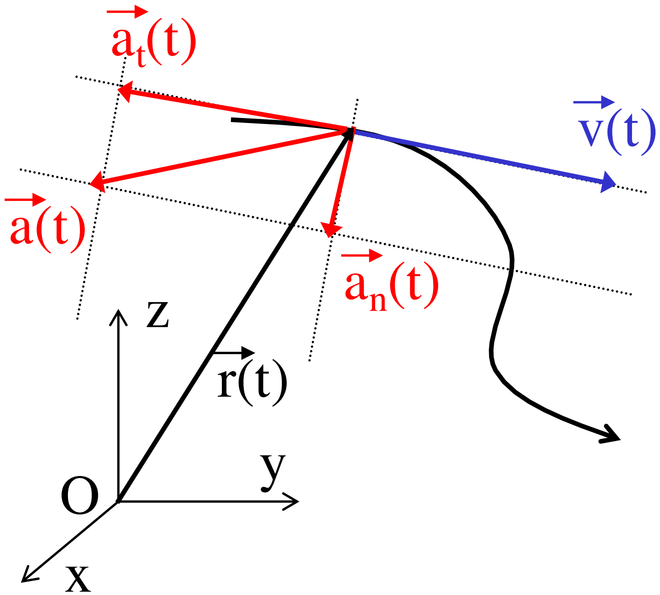
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{r}}{ds} = v\hat{\tau}$$

$$\hat{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$ = vecteur unitaire tangent à la trajectoire

EPFL

Cinématique du point matériel





$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

$$= \text{accélération vectorielle instantanée}$$

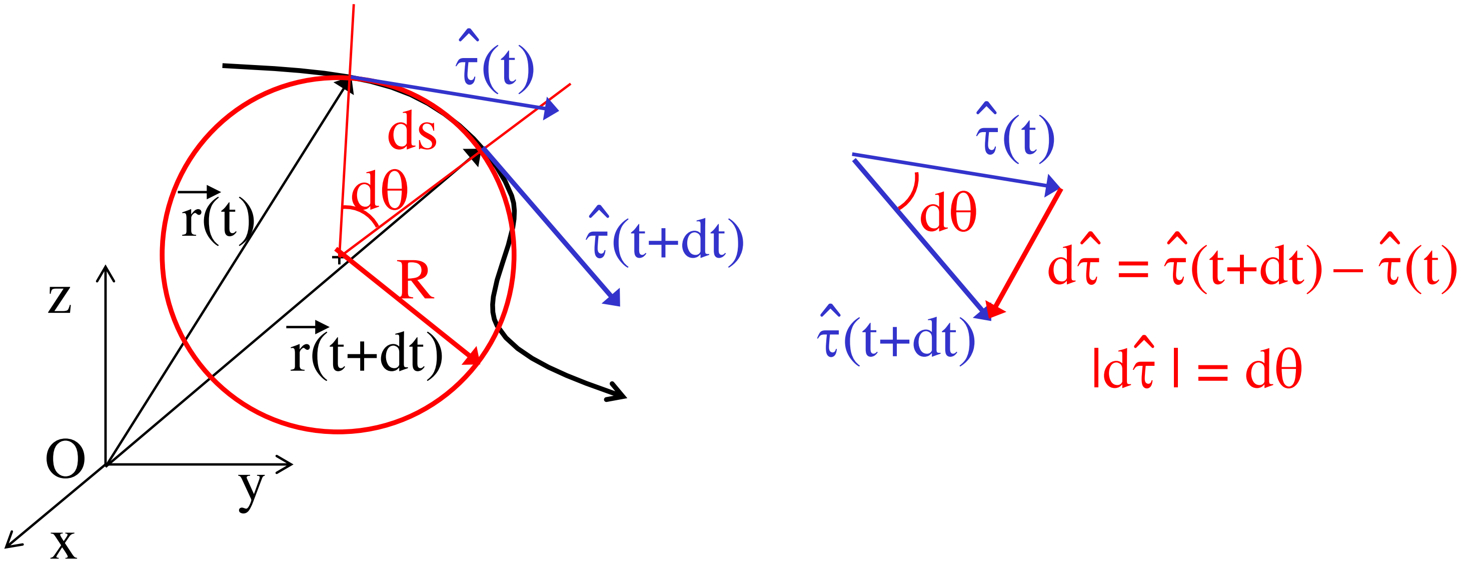
$$= \frac{d}{dt}(\underbrace{v\ \hat{\tau}}_{\vec{v}(t)}) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\ \hat{\tau}}_{\vec{a}_t(t)} + \underbrace{v\ \frac{d\hat{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n(t)}$$

$$\vec{a}_t(t) = \text{accélération tangentielle (colinéaire à } \vec{v})$$

$$\vec{a}_n(t) = \text{accélération normale (perpendiculaire à } \vec{v}(t),\ \text{car } \hat{\tau}\cdot\frac{d\hat{\tau}}{dt} = 0)$$

Accélération normale

- Approximation de la trajectoire par un arc de cercle



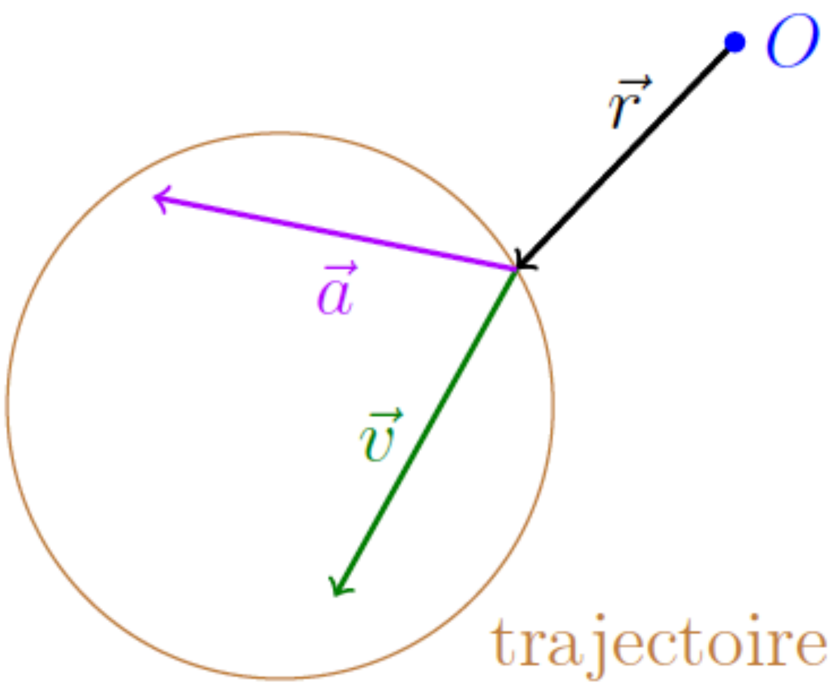
$$\vec{a}_n(t) = v(t)\frac{d\hat{\tau}}{dt} = v(t)\frac{d\hat{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v(t)^2\frac{d\hat{\tau}}{ds}$$

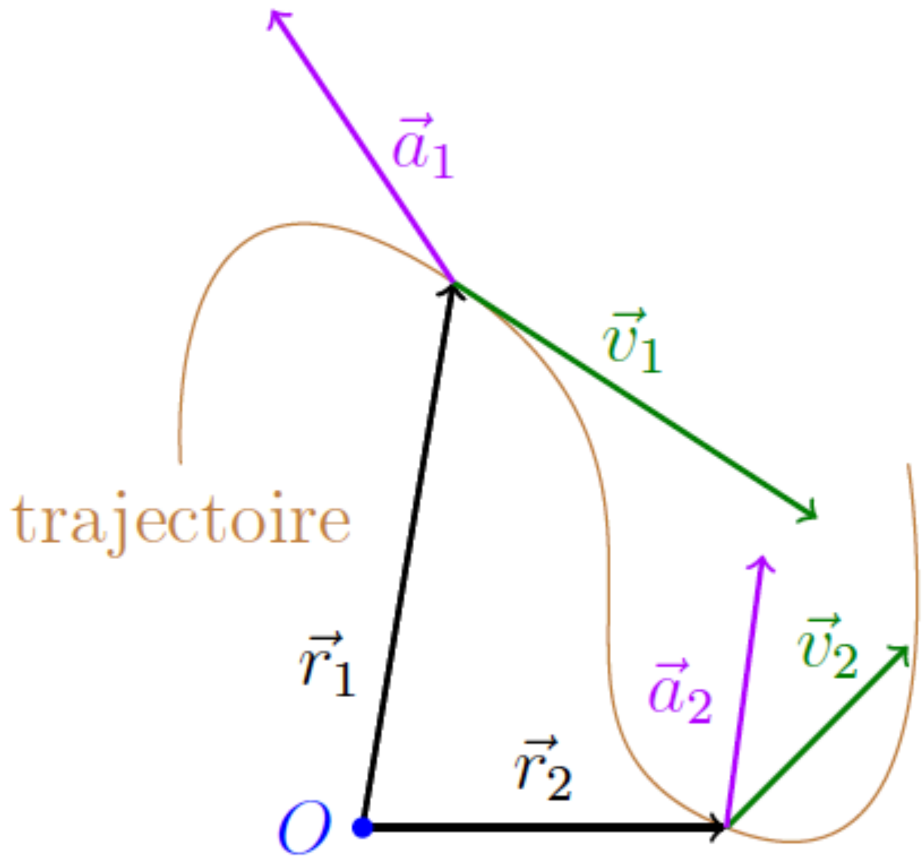
$= $ accélération normale dirigée vers le centre de courbure

$$a_n(t) = \left|\vec{a}_n(t)\right| = v^2(t)\left|\frac{d\hat{\tau}}{ds}\right| = v(t)^2\frac{d\theta}{R(t)\,d\theta} = \frac{v(t)^2}{R(t)}$$

$= $ norme de l'accélération normale

Exemples





Indiquer pour chacun des vecteurs vitesse et accélération
si ils sont réalistes ou non

Exemples

Une voiture initialement à l'arrêt effectue un quart de tour sur une route. Sa trajectoire est un arc de cercle de rayon 4 m, et le compteur du véhicule indique que sa vitesse augmente de 3 m/s à chaque seconde.

(a) Quelle est l'accélération tangentielle du véhicule pendant la manoeuvre ?

(b) Combien de temps met le véhicule pour faire le quart de tour ?

(c) Quelle sont la vitesse, l'accélération normale et l'accélération tangentielle du véhicule après un quart de tour ?

Application: mouvement à vitesse scalaire constante

- Seule l'orientation du vecteur vitesse change

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

Mais $$\frac{d\hat{\tau}}{dt} \cdot \hat{\tau} = \frac{1}{2}\frac{d\|\hat{\tau}\|^2}{dt} = 0$$

L'accélération est purement normale

$$\vec{a} = a_n\hat{r} = -\frac{v^2}{R}\hat{r}$$

- Force centripète

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Feedback indicatif - cours de mécanique

Merci de me donner votre retour sur le cours, et surtout vos suggestions pour l'améliorer

De façon générale, je suis satisfait.e du cours

	1	2	3	4	5	
Pas du tout	○	○	○	○	○	Complétement

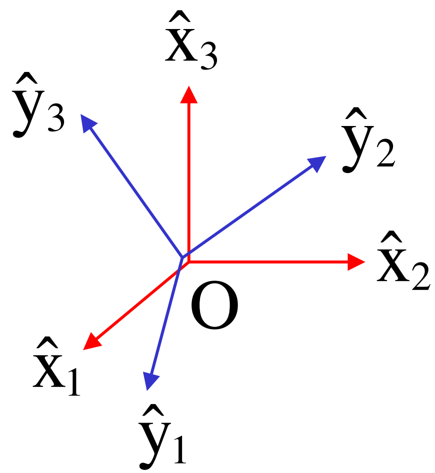
Mes commentaires et suggestions

Réponse longue

Description des rotations spatiales

Une rotation est définie par un axe, un sens et un angle

- Système en rotation dans un repère fixe
- Système fixe dans un repère mobile en rotation



Théorème d'Euler

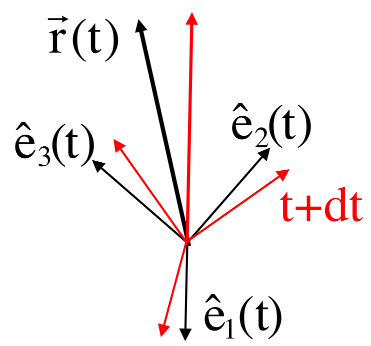
Deux repères droits de même origine peuvent toujours être ramenés l'un sur l'autre par une rotation

Vecteurs en rotation

Pendant un petit intervalle de temps dt, le repère subit une rotation infinitésimale

Projection de la dérivée des vecteurs de base sur la base

$$\frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} = E_{11}(t)\hat{e}_1(t) + E_{12}\hat{e}_2(t) + E_{13}\hat{e}_3(t)$$
$$\frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} = E_{21}(t)\hat{e}_1(t) + E_{22}\hat{e}_2(t) + E_{23}\hat{e}_3(t)$$
$$\frac{d\hat{e}_3(t)}{dt} = E_{31}(t)\hat{e}_1(t) + E_{32}\hat{e}_2(t) + E_{33}\hat{e}_3(t)$$



On rassemble ces équations dans une notation matricielle

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}$$

Vecteurs en rotation

La matrice est antisymétrique $E_{ij} = -E_{ji}$

En effet: $0 = \frac{d\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}{dt} = \mathcal{E}\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot \mathcal{E}\hat{e}_j = E_{ij} + E_{ji}$

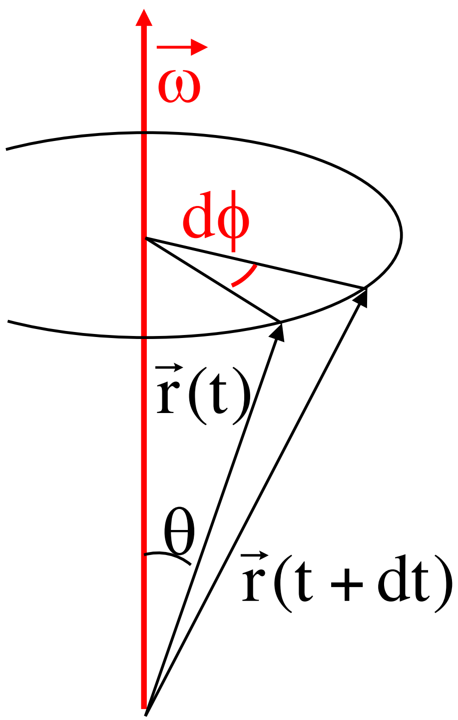
On introduit la notation $\mathscr{E} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$

qui définit le vecteur $\overrightarrow{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$ vecteur vitesse de rotation (ou vecteur rotation instantanée)

- On établit la formule de Poisson $\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$
- Et pour tout vecteur fixe dans le référentiel en rotation: $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$

Vecteurs en rotation

- La direction de $\vec{\omega}$ est celle de l'axe de rotation
- Le sens de rotation est direct (anti-horaire) lorsque $\overrightarrow{\omega}$ pointe vers l'observatrice.
- La norme de $\vec{\omega}$ est égale à la vitesse angulaire de rotation



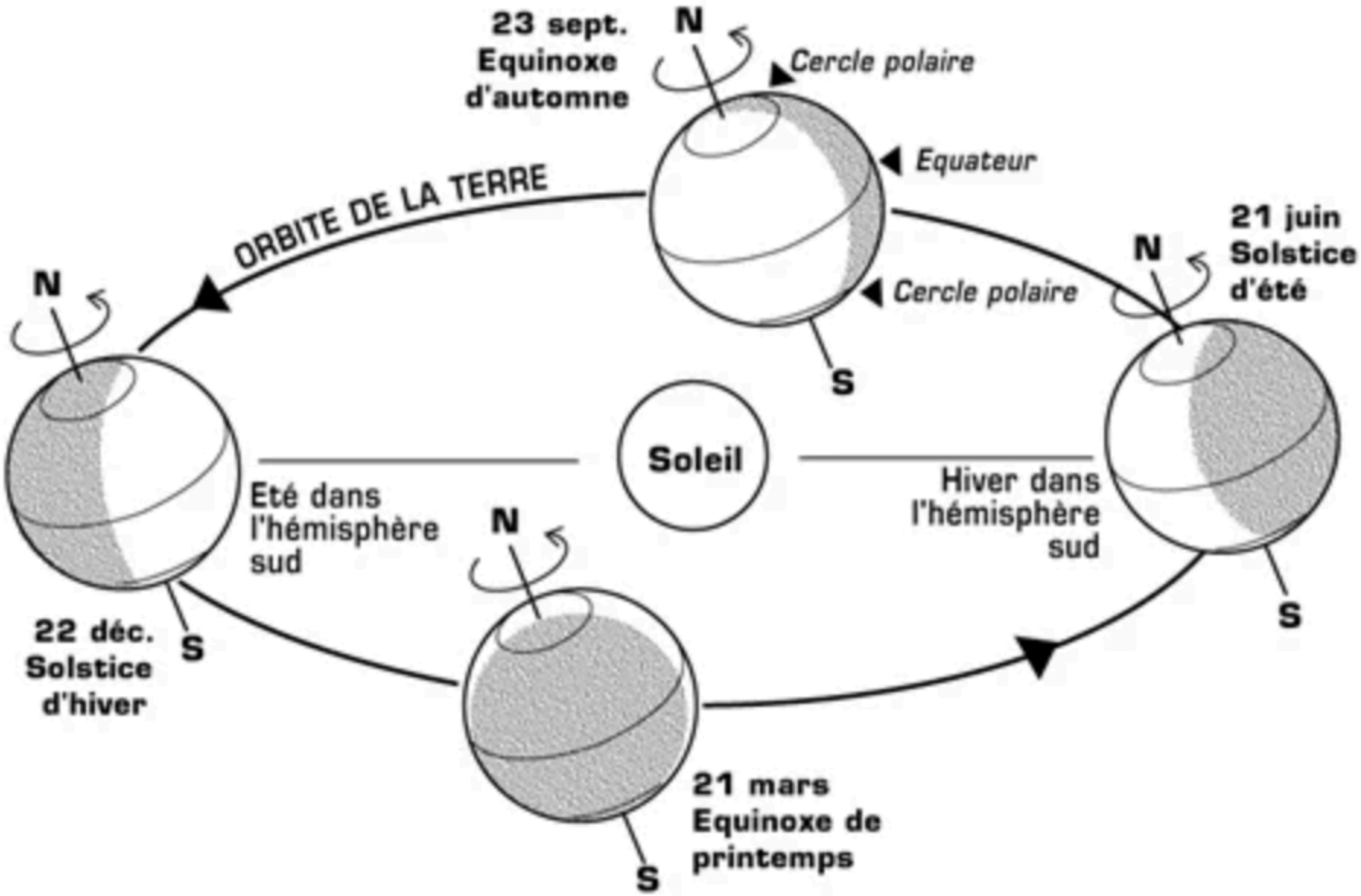
$$|d\vec{r}| = |\vec{\omega} \wedge \vec{r}|\, dt = \omega\, |\vec{r}| \sin\theta dt$$

Mais $|d\vec{r}| = |\vec{r}| \sin\theta d\phi$

$$\boxed{\omega = \frac{d\phi}{dt}}$$

Animation: https://www.geogebra.org/m/JThtZJa4

Exemple



- Dessiner les vecteurs rotations pour le mouvement de la terre sur elle-même et autour du soleil.
- Quel est l'angle entre eux ?
- Quel est le rapport entre leurs normes ?

Exemple

- Décrire le vecteur rotation instantanée d'un pendule au cours de son mouvement (direction, sens et norme)