(ii) Par contraposée : pour montrer $A \Rightarrow B$, on montre non $(B) \Rightarrow$ non (A).
(vérifier : $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)]$ sur une table de vérité)

Contraposée de (*) : "s'il ne pleut pas alors je n'ai pas mon parapluie"

(iii) Par récurrence :

Théorème : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un énoncé qui dépend de n tel que :

- $P(n_0)$ est vrai ← (initialisation)
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie (hérédité)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ on a $P(n)$ est vraie.

Fin cours 29/09/2022

Exemple : Soit $S(n) := 1 + 2 + \dots + n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)
Montrer que "$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$" : $P(n)$

- Initialisation : $n_0 = 1$
$S(n_0) = 1$ et $\frac{n_0(n_0+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ donc $P(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie.

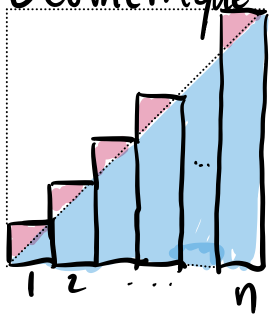
$$
\begin{aligned}
S(n+1) &= 1 + 2 + \dots + n + (n+1) \\
&= S(n) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{par } P(n) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

- Par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0 = 1$.

Autre démonstration :

• Géométrique :



$$S(n) = \text{aire totale des rectangles.}$$
$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

• Astucieuse :

$$\begin{aligned} S(n) + S(n) &= 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ &\quad + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ &= (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

Donc $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

0.3.3 Quelques rappels sur les sommes et produits

Notations : $\sum$ somme

$\prod$ produit

Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des nombres, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Exemple : $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$, $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

variable muette

Règles de calcul : Pour $l, m, n \in \mathbb{Z}$, $l < m < n$

• $\sum_{k=l}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n} a_k$

• $\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

• $\left(\prod_{k=l}^{m} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=l}^{n} a_k$

• $\prod_{k=m}^{n} a_k \cdot b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$

Formules importantes :

(i) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \left(= (\text{premier terme}) \cdot \frac{1-a^{\text{nb de termes}}}{1-a} \right)$$

Preuve : $(1-a)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k$

$$= a^0 - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}$$

Puis diviser par $1-a$ (autorisé car $a \neq 1$).

(ii) Notation "n factoriel" :
$$\begin{cases} n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \\ \quad\; = \prod_{k=1}^{n} k \\ 0! = 1 \quad (\text{convention}) \end{cases}$$

(iii) Coefficients binomiaux :

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{"k parmi n"}} := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad (n,k \in \mathbb{N},\ n \geq k)$$

$$\left(\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1} = n(n-1)\ldots(n-k+1) \right)$$

$\binom{n}{k}$: nb de sous-ensembles à k éléments dans un ensemble à n éléments.

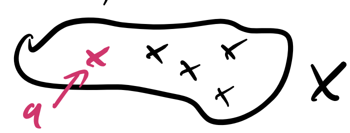
(iv) Formule du binôme ($a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$)

$$(a+b)^n \left(= \underset{1}{(a+b)} \cdot \underset{2}{(a+b)} \cdot \ldots \underset{n}{(a+b)} \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

choix de k facteurs a parmi les n possibles

(v) Formule de Pascal

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad \text{pour } k,n \in \mathbb{N},\ k+1 \leq n.$$



Soit X un ensemble à $n+1$ éléments et $a \in X$.

[nb de choix de $k+1$ éléments dans X] = [nb de choix de $k+1$ éléments contenant a] + [nb de choix de $k+1$ éléments ne contenant pas a]

$$\binom{n+1}{k+1} \qquad \binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k+1}$$

Triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \boxed{\binom{2}{1}} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 = \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 = \binom{1}{1} & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 = \binom{2}{2} & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \leftarrow \binom{4}{k} \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$\searrow \binom{5}{2}$

Par exemple :

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$\left(= \sum_{k=0}^{4} \underbrace{\binom{4}{k}}_{} a^{n-k} b^k \right)$$

↳ se lit sur le triangle de Pascal (ou se calcule à partir de la formule).

Remarque : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Chapitre 1 : Nombres Réels

"La droite numérique sans trous"

"Toutes les grandeurs mesurables"

$$\xrightarrow[\;0\;]{\hspace{4em}} \mathbb{R}$$

Pour aller plus loin : construction de $\mathbb{R}$.

Soit V l'ensemble des nombres r à virgule "infinis"

$$r = a, a_1 a_2 a_3 \dots \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z},\ a_1, a_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$$

On définit $\sim$ par $0,999\ldots \sim 1,000\ldots$

$0,25999\ldots \sim 0,26000\ldots$

On peut voir $\mathbb{R}$ comme $V/\sim$ (il faut aussi définir $+, \cdot, \leqslant$ etc)

1.1 Supremum / Infimum / Maximum / Minimum

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (qui le distingue de $\mathbb{Q}$) :

" Tout ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré admet un plus grand minorant dans $\mathbb{R}$. "

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (A sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide).

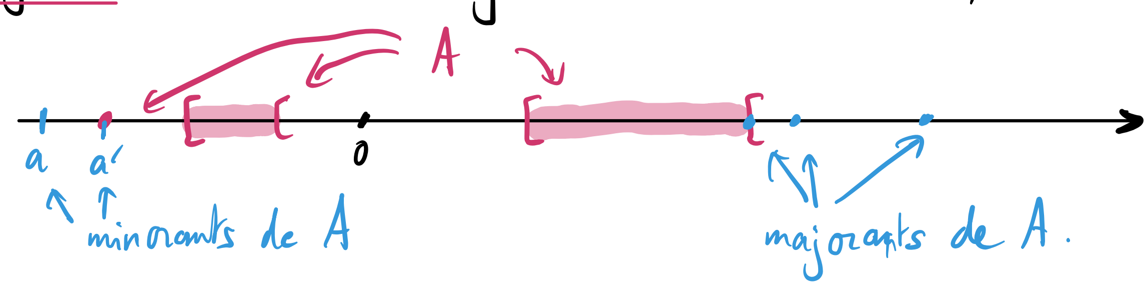
- **Minimum** : S'il existe $m \in A$ tel que $\forall x \in A$, $m \leqslant x$ on dit que m est le minimum de A.
- **Maximum** : S'il existe $M \in A$ tel que $\forall x \in A$, $M \geqslant x$ on dit que M est le maximum de A.

Exemple : soit $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leqslant 1\}$

- A admet un maximum 1 ($1 \in A$)
- A n'admet pas de minimum ($\forall x \in A$, $\frac{x}{2} \in A$ et $\frac{x}{2} < x$)

Remarque : s'il existe le min (respectivement le max) est unique.

- **Minorant** : x est un minorant de A si $\forall a \in A$, on a $x \leqslant a$.
- **Majorant** : x — majorant — $\forall a \in A$, on a $x \geqslant a$.



- Minoré : A est minoré s'il existe un minorant
(c-à-d, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A$, $x \leq a$)
- Majoré : A est majoré s'il existe un majorant
(c-à-d, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A$, $x \geq a$)
- Borné : A est borné si A est majoré et minoré.

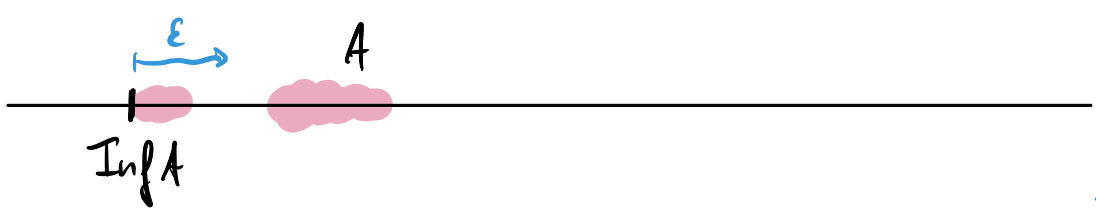
Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } 1/x < 1\}$
$(x > 0 \text{ et } 1/x < 1) \Leftrightarrow (x > 1)$
donc $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ | n'est pas majoré
| et minoré (0 est minorant, 1 aussi)

Def : L'infimum (ou borne inférieure) de A est le plus grand minorant de A, il est noté $\operatorname{Inf} A$.

Thm (admis). Tout ensemble non vide minoré de $\mathbb{R}$ admet un infimum dans $\mathbb{R}$.

Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } x^2 > 2\}$ admet un infimum $x > 0$ tel que $x^2 = 2$
(c-à-d $x = \sqrt{2}$).

Propriétés :
- $\forall x \in A$, $\operatorname{Inf} A \leq x$ (car $\operatorname{Inf} A$ est un minorant)
- $\forall b \in \mathbb{R}$, si b est minorant de A alors $b \leq \operatorname{Inf} A$.
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tel que $x \leq \operatorname{Inf} A + \varepsilon$.



fin cours 03/10/2022