Cours Euler: Corrigé 8

le 12 octobre 2022

Exercice 1

1. Vérifions que pour tout point $P \in \pi$, la correspondance f fait correspondre un seul point à P.
   - Si $P = A$, alors B est l'unique point que f fait correspondre à A par définition de f.
   - Si $P = B$, alors A est l'unique point que f fait correspondre à B par définition de f.
   - Si $P \neq A$ et $P \neq B$, alors P est l'unique point que f fait correspondre à P par définition de f.
2. Oui : soient $P \neq Q$ deux points distincts du plan π. On a, sans perte de généralité, trois cas possibles :
   (a) $P \neq A$, $P \neq B$, $Q \neq A$ et $Q \neq B$. Alors $f(P) = P \neq Q = f(Q)$.
   (b) $P = A$ et $Q \neq B$. Alors $f(P) = B \neq Q = f(Q)$.
   (c) $P = A$ et $Q = B$. Alors $f(P) = B \neq A = f(Q)$.

   Les cas où $P = B$ se traitent de la même manière.
3. Oui : Si P est un point du plan, il y a 3 cas possibles :
   (a) $P \neq A$ et $P \neq B$. Alors P est l'image de P par f.
   (b) $P = A$. Alors P est l'image de B par f.
   (c) $P = B$. Alors P est l'image de A par f.
4. Remarquons que $f(f(P)) = P = f(f(P))$ pour tout point P du plan. Donc, f est son propre inverse.
5. Notons x la distance entre A et B :
   $$x = d(A, B)$$
   Soit P un point à distance $\frac{x}{4}$ du point A. Alors $P \neq A$, $P \neq B$ et $d(P, B) \geq \frac{3}{4}x$ par l'inégalité triangulaire. On a donc
   $$d(f(P), f(A)) = d(P, B) \geq \frac{3}{4}x > \frac{x}{4} = d(P, A)$$
   Alors f n'est pas une isométrie car $d(f(P), f(A)) \neq d(P, A)$.
6. L'image du segment $[AB]$ est encore le segment $[AB]$. En effet, tous les point du segment restent fixes sauf A et B, qui changent de place l'un avec l'autre.

Exercice 2

1. On peut écrire :

$$\begin{aligned} f: \quad \pi &\longrightarrow \pi \\ P &\longmapsto \begin{cases} P & \text{si } O \text{ et } P \text{ sont du même côté de } d \\ (OP) \cap d & \text{si } O \text{ et } P \text{ ne sont pas du même côté de } d, \\ P & \text{si } P \in d. \end{cases} \end{aligned}$$

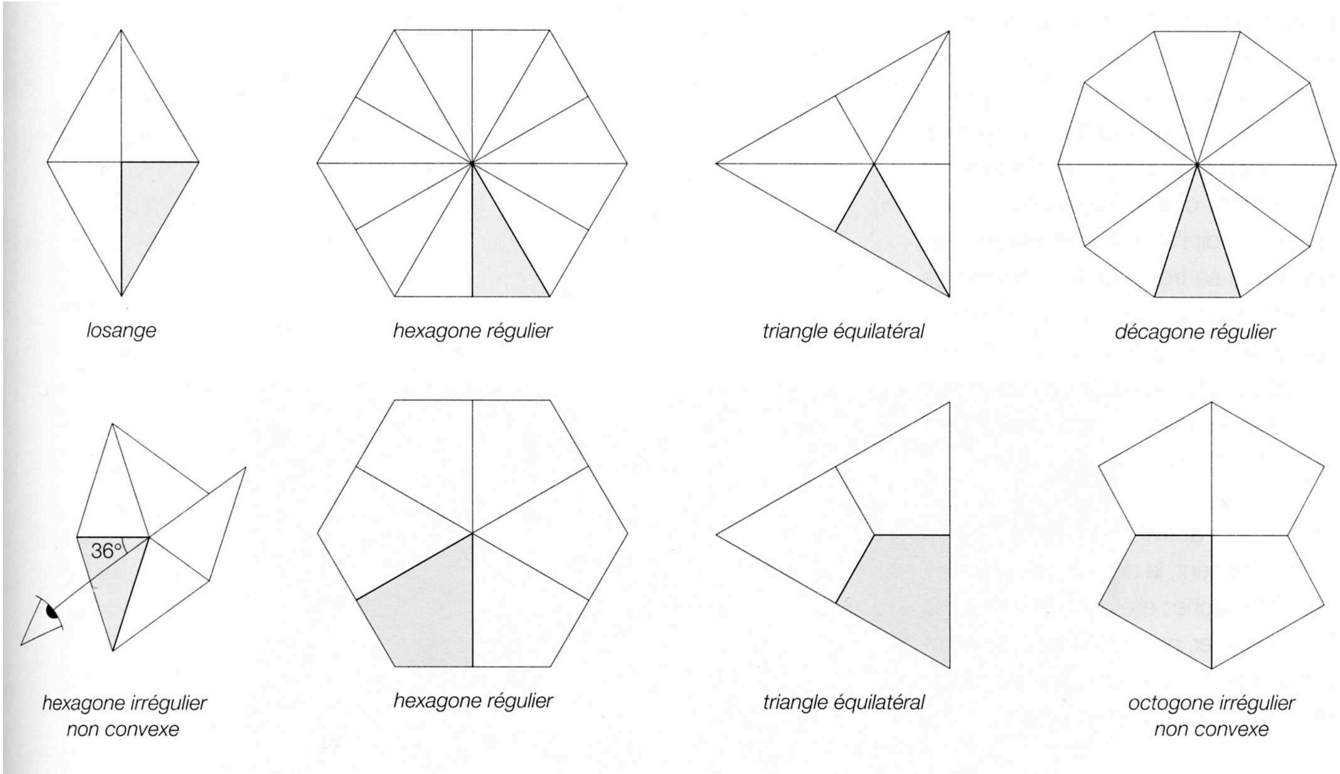
Il faut vérifier que pour tout point $P \in \pi$, la correspondence f fait correspondre un unique point à P. Dans les cas 1. et 3. de l'énoncé, le point P est l'unique point que f fait correspondre à P.

Dans le cas 2. : Remarquons que $P \neq O$ car P et O ne sont pas du même côté. Nous devons montrer que l'intersection $(OP) \cap d$ contient exactement un point. Comme deux droites ont au plus un point en commun, il suffit de montrer que OP et d se coupent. Or, le segment $[OP]$ coupe d en un point par l'axiome du demi-plan.

2. Non : Remarquons que $f(f(P)) = f(P)$ pour tout point P du plan. Soit P un point qui n'est pas du même côté que O par rapport à P. Posons $Q = f(P)$. Alors Q et P sont distincts, car $Q \in d$, mais P n'appartient pas à d. Comme $f(P) = f(f(P)) = f(Q)$, la transformation f ne transforme pas deux points distincts en deux points distincts.
3. Non : un point P de l'autre côté du point O par rapport à d n'est pas dans l'image de f.
4. La transformation f n'admet pas d'inverse.
5. Comme la transformation f n'admet pas d'inverse, elle n'est pas une isométrie.
6. Soient P et Q deux points distincts, et considérons le segment $[PQ]$. Enonçons tous les cas possibles :
   (a) P et Q sont dans le même demi-plan que O par rapport à d. Donc l'image par f de $[PQ]$ est $[PQ]$.
   (b) P est dans le même demi-plan que O par rapport à d, et Q ne l'est pas. Le segment $[PQ]$ coupe d en un point, qu'on note R. En cas où P appartient à la frontière d, on a $R = P$ et nous regardons « le segment » $[PR]$ comme un point.
      i. Si P, Q et O sont alignés, alors l'image par f est le segment $[PR]$. En effet, l'image par f d'un point sur le segment $[RQ]$ est R.
      ii. Sinon, l'image par f de Q est un point sur la droite d, qu'on note S. Donc l'image par f d'un point sur le segment $[RQ]$ est sur le segment $[RS]$. Finalement, on obtient que l'image par f de $[PQ]$ consiste en deux segments : les segments $[PR]$ et $[RS]$.
   (c) P et Q ne sont pas du même côté de O par rapport à d. Notons $R = f(P)$ et $S = f(Q)$. Alors l'image du segment $[PQ]$ par f est le segment $[RS]$. Il se peut que $R = S$. Dans ce cas on regarde le segment $[RS]$ comme un point.
7. Soit d' une droite du plan. On a plusieurs cas possibles :
   (a) Si d' est entièrement du même côté que O par rapport à d, alors tous les points de d' sont fixés par f (ceci peut se produire seulement si d et d' sont parallèles).
   (b) Si d' est parallèle à d mais elle n'est pas du même côté que O par rapport à d, alors l'image de d' est d.
   (c) Si d' coupe d en un point P notons d'_1 la demi-droite contenue dans d' et dans le demi-plan du même côté que O par rapport d, et d'_2 l'autre demi-droite de d'. Soit encore p la parallèle à d' passant par O et Q le point d'intersection avec d. Si O est dans d', l'image de d' par f est d'_1 car l'image de d'_2 est le point P et d'_1 reste fixé par f. Sinon l'image d'un point de d'_2 se trouve sur le segment $[P, Q[$. L'image de d' est dans ce cas l'union de d'_1 et de $[P, Q[$.

Exercice 3

On obtient les figures suivantes :

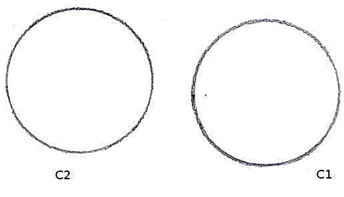


Exercice 4

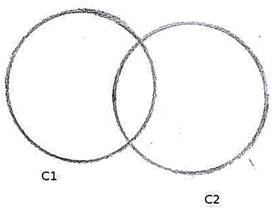
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.
Les lettres A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X et Y admettent un axe de symétrie.
Les lettres H, I, O et X admettent au moins 2 axes de symétrie.

Exercice 5

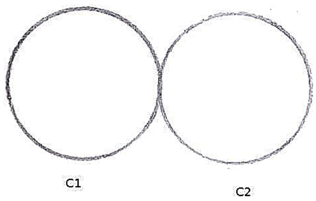
Les cercles.



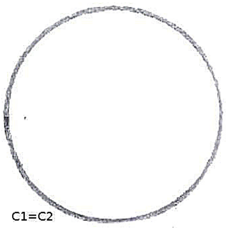
1. (a) Les deux cercles sont disjoints.
   (b) Les deux cercles se coupent en exactement deux points.



(c) Les deux cercles se coupent en exactement un point. On dit qu'ils sont tangents.



(d) Les deux cercles sont les mêmes. On obtient un unique cercle.



2. Il y en a une infinité. Le plus petit est celui dont le diamètre est $[AB]$ et son centre est le milieu de $[AB]$. Les autres ont leur centre sur la médiatrice du segment $[AB]$.
3. Ces centres décrivent un cercle de centre C de rayon r. En effet, chaque centre est à distance r du point C.

Exercice 6

Ecriture décimale et fractions. (32 points = 8 + 8 + 8 + 8) On demande dans cet exercice de donner tous les calculs qui conduisent au résultat.

(1) Pour transformer la fraction $\frac{49}{280}$ en écriture décimale, on se rend d'abord compte qu'elle n'est pas réduite. On peut simplifier par 7 si bien que $\frac{49}{280} = \frac{7}{40}$ est une fraction dont le dénominateur est $40 = 2^3 \cdot 5$, un diviseur de 1000. On amplifie donc par 5^2 pour trouver $\frac{49}{280} = \frac{7}{40} = \frac{175}{1000} = 0{,}175$.

(2) Pour transformer la fraction $\frac{40}{37}$ en écriture décimale, on applique la méthode de division euclidienne. On calcule $40 = 1 \cdot 37 + 3$ (reste 3), puis $30 = 0 \cdot 37 + 30$ (reste 30), puis $300 = 8 \cdot 37 + 4$ (reste 4), puis $40 = 1 \cdot 37 + 3$ (reste 3). On a déjà fait ce calcul, si bien que $\frac{40}{37} = 1{,}\overline{081}$ et la longueur de la période est 3.

(3) Le nombre 0,512 est égal à $\frac{512}{1000}$, qu'on peut simplifier par 2^3, si bien qu'on trouve $0{,}512 = \frac{512}{1000} = \frac{256}{500} = \frac{128}{250} = \frac{64}{125}$.

(4) Puisque la période du nombre $0{,}\overline{123}$ est trois, la méthode de conversion en écriture fractionnaire nous dit de multiplier ce nombre par 1000 puis de soustraire $0{,}\overline{123}$. Ainsi

$$999 \cdot 0{,}\overline{123} = 123{,}\overline{123} - 0{,}\overline{123} = 123$$

Il ne reste plus qu'à simplifier la fraction donnée par cette égalité : $0{,}\overline{123} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$.

Exercice 7

Théorie : les nombres rationnels. (28 points = 5 + 8 + 7 + 8)

(1) Pour additionner deux nombres rationnels représentés par des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, nous devons les mettre au même dénominateur. Par définition $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

(2) Pour montrer que la somme dans $\mathbb{Q}$ est commutative, on représente les nombres $r, s \in \mathbb{Q}$ par des fractions. Disons $r = \frac{a}{b}$ et $s = \frac{c}{d}$. Ainsi, par définition de la somme

$$r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

Par commutativité du produit dans $\mathbb{Z}$ on peut écrire le dénominateur $cd = dc$ et par commutativité de la somme dans $\mathbb{Z}$ on peut écrire le numérateur $ad+bc = bc+ad$. Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ on transforme encore ceci en $cb + da$. Donc

$$r + s = \frac{cb+da}{dc} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = s + r$$

où nous avons conclu en utilisant à nouveau la définition de la somme de deux fractions.

(3) Soit m un nombre entier non nul. On calcule en mettant d'abord au même dénominateur :

$$\left(\frac{7}{m} + \frac{m}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{7^2}{7m} + \frac{m^2}{7m}\right)^{-1} = \left(\frac{49+m^2}{7m}\right)^{-1} = \frac{7m}{49+m^2}$$

(4) On voit d'abord que le nombre rationnel r qui vérifie $\frac{1}{r} = \frac{2}{5}$ est $r = \frac{5}{2}$. Pour que l'inégalité $\frac{1}{r} \leq \frac{2}{5}$ soit vérifiée on constate alors que soit r est négatif, soit r doit être plus grand ou égal à $\frac{5}{2}$ car si on divise par un nombre plus grand, le résultat de la division est plus petit.

Ainsi la solution est l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq 3/7\} \cup \mathbb{Q}^*_-$.

Exercice 8

On calcule dans $\mathbb{Q}$. (20 points = 12 + 8) Effectue les calculs suivants en indiquant les étapes intermédiaires et donne la réponse sous forme de fraction irréductible :

(i) On commence par simplifier le plus possible avant de se lancer dans les calculs, d'une part parce que les fractions ne sont pas toutes irréductibles (à gauche) ou parce que l'on peut "simplifier en diagonale" (à droite) :

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{44}{99}\cdot\left(-\frac{25}{35}\right) - \frac{13}{14}\cdot\frac{10}{39}\right) : \frac{7}{15}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right) - \frac{1}{7}\cdot\frac{5}{3}\right) : \frac{7}{15}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{20}{63} - \frac{5}{21}\right) : \frac{7}{15}\right]$$

Après les multiplications on met au même dénominateur, puis on utilise le fait que diviser c'est multiplier par l'inverse :

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{20}{63} - \frac{5}{21}\right) : \frac{7}{15}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{20}{63} - \frac{15}{63}\right) : \frac{7}{15}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{35}{63} : \frac{7}{15}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{35}{63}\cdot\frac{15}{7}\right]$$

On simplifie encore la première fraction dans la parenthèse, puis en diagonale, avant d'effectuer le produit :

$$\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{5}{9}\cdot\frac{15}{7}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{7}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{25}{21}\right) = -\mathbf{\frac{25}{42}}$$

(ii) Puisque $8{,}\bar{3} = 8 + 1/3 = 25/3$ il suffit de mettre les deux nombres au même dénominateur pour les comparer. D'une part $\frac{25}{3} = \frac{1000}{120}$ et d'autre part $\frac{331}{40} = \frac{993}{120}$. C'est donc le premier qui est plus grand.

Exercice 9

Deux petits problèmes. (24 points = 12 + 12) A. Lors des élections américaines seulement 54% des électeurs ont effectivement voté et parmi ceux-ci 47% ont voté pour Donal Trump. Le pourcentage des électeurs ayant voté pour Trump correspond donc à 47% de 54% c'est-à-dire à

$$\frac{47}{100} \cdot \frac{54}{100} = \frac{2538}{10'000} = 25{,}38\%$$

B. Pour installer un home cinéma à la Maison Blanche, Donald Trump souhaite repeindre un grand mur de 2.5 mètres de haut et de 7 mètres de large avec une peinture blanche spéciale. Il lit sur le pot qu'on peut couvrir $6m^2$ avec un kilo de peinture. On applique ici une "règle de trois" pour calculer combien de peinture il lui faudra pour réaliser son rêve. En effet le mur a une surface de $17{,}5m^2 = \frac{35}{2}m^2$.

Le poids de peinture est donc $\frac{35}{2} : 6 = \frac{35}{12} = 2{,}91\bar{6}$ kg.