
Analyse I – Série 3

Remarque générale.

Pour les exercices de type Vrai ou Faux (V/F), répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Valeur absolue. On rappelle que la (fonction) valeur absolue, notée $|\cdot|$, est la fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}_+ définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0, \\ -x & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Echauffement 1. (Inégalité triangulaire) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Sol.

En utilisant la propriété $x \cdot y \leq |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, on obtient

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y \leq |x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2.$$

Par conséquent, $|x + y| \leq |x| + |y|$. (Une autre approche pour résoudre cet exercice consiste à étudier les différents cas possibles pour les signes de x, y et $x + y$).

Echauffement 2. (Inégalité triangulaire inversée) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \geq \left| |x| - |y| \right|.$$

Sol.

En utilisant l'inégalité triangulaire (échauffement 1) on a d'une part

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \Rightarrow |x + y| \geq |x| - |y|,$$

et d'autre part

$$|y| = |y + x - x| \leq |y + x| + |x| \Rightarrow |x + y| \geq |y| - |x|.$$

Il s'ensuit $|x + y| \geq \left| |x| - |y| \right|$.

Exercice 1. (Nombres irrationnels)

Démontrer que les nombres réels r suivants sont irrationnels

a) $r = \sqrt{3}$

b) $r = \sqrt{7 + \sqrt{17}}$

c) (*) $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Sol.:

a) On raisonne par l'absurde. Supposons que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec p, q des entiers naturels tels que $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Il s'ensuit que $p^2 = 3q^2$, c.-à-d. que p^2 est donc un multiple de 3, ce qui n'est possible que si p est un multiple de 3. On a donc $p = 3a$ pour un entier naturel a . Par conséquent, $3^2 a^2 = 3q^2$ et donc $q^2 = 3a^2$. Ainsi q^2 est un multiple de 3, ce qui n'est possible que si q est un multiple de 3. Mais ceci implique que le plus grand commun diviseur de p et de q n'est pas égal à 1, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.

b) On a

$$r^2 = 7 + \sqrt{17},$$

ou

$$\sqrt{17} = r^2 - 7.$$

Si r est un nombre rationnel, il s'en suit que $r^2 - 7$ en est aussi un et donc $\sqrt{17}$ aussi, ce qui est une contradiction. (La preuve que $\sqrt{17}$ est un nombre irrationnel se fait comme pour $r = 2$ ou 3 ou tout autre nombre premier, cf. i.) Donc $r = \sqrt{7 + \sqrt{17}}$ est irrationnel.

c) On a

$$(r - \sqrt{2})^3 = 3,$$

et donc

$$r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 3r \cdot 2 - 2\sqrt{2} - 3 = 0,$$

d'où on obtient

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2}.$$

Cette égalité implique que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel si r est un nombre rationnel, ce qui est une contradiction. Donc r est irrationnel.

Exercice 2. (Intervalles)

Récrire les ensembles A suivants en utilisant la notation des intervalles :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$

Sol.:

a) $A =]-\infty, 1[$

b) $A =]-\infty, 1]$

c) $A = [-1, \infty[$

d) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

e) $A =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$

f) $A =]-\infty, -\sqrt[3]{3}]$

Exercice 3. (Sous-ensembles de \mathbb{R})

Pour chaque ensemble, étudier s'il est majoré ou minoré dans \mathbb{R} . Si l'ensemble est majoré, trouver son supremum et s'il est minoré, trouver son infimum. Dans chaque cas, étudier si le supremum (l'infimum) appartient à l'ensemble.

a) $A =]-1, \sqrt{2}]$

b) $B =]\sqrt{2}, \infty[$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$

e) $E = \mathbb{Q}$

f) $F = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$

Sol.:

a) $\text{Sup } A = \sqrt{2} \in A$, $\text{Inf } A = -1 \notin A$ (voir les notes du cours).

b) B n'est pas majoré dans \mathbb{R} , $\text{Inf } B = \sqrt{2} \notin B$.

c) Soit $x \in C$, alors $|2x - 1| \leq 1$, ce qui équivaut à $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$, soit encore $0 \leq x \leq 1$. Par conséquent, 0 est le plus grand minorant de C , et 1 est le plus petit majorant de C . $\text{Sup } C = 1 \in C$, $\text{Inf } C = 0 \in C$.

d) De la même manière qu'à la question précédente, $|x^2 - 2| < 1$ équivaut à $-1 < x^2 - 2 < 1$, soit $1 < x^2 < 3$. Pour les solutions positives, on peut passer à la racine carrée (comme la fonction racine carrée est croissante, l'ordre des inégalités est gardé) et obtenir $1 < x < \sqrt{3}$. Pour les solutions négatives ($x < 0$), le même raisonnement peut être appliqué à $-x$ et conduit à $1 < -x < \sqrt{3}$, soit $-\sqrt{3} < x < -1$. Par conséquent, $D =]-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}[$, donc $\text{Sup } D = \sqrt{3} \notin D$, $\text{Inf } D = -\sqrt{3} \notin D$.

e) G n'est ni majoré ni minoré puisqu'il contient l'ensemble des entiers relatifs.

f) $\text{Sup } I = 1 \notin I$, $\text{Inf } I = 0 \notin I$.

Exercice 4. (Rationnels, irrationnels)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

V F

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) La somme de deux rationnels est rationnelle. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) La somme de deux irrationnels est irrationnelle. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Le produit de deux rationnels est rationnel. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Le produit de deux irrationnels est irrationnel. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| f) Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

a) C'est vrai, en effet $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$. Cela est vrai pour la différence aussi.

b) C'est faux. Par exemple $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme est rationnelle.

c) C'est faux. En effet si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors si $a + b \in \mathbb{Q}$ on aurait $b = (a + b) - a \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

d) Vrai car $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$

e) C'est faux, par exemple $a = \sqrt{2} = b$ sont irrationnels, mais $ab = 2$ ne l'est pas.

f) Faux. Prendre par exemple $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 5. (Sous-ensembles de \mathbb{R})

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

V F

- | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) Si $\text{Sup } A \in A$ et $\text{Inf } A \in A$, alors A est un intervalle fermé. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si A est un intervalle fermé et borné, alors $\text{Sup } A \in A$ et $\text{Inf } A \in A$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si $\text{Sup } A \in A$ et $\text{Inf } A \notin A$, alors A est un intervalle semi-ouvert. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $\text{Sup } A = \text{Inf } A$, alors A est un point. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Si A est minoré, alors $\text{Inf } A \notin A$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| f) Si A est majoré, alors $\max A$ existe. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

a) FAUX.

Prendre par exemple $A = [0, 1[\cup]1, 2]$. La proposition serait vraie pour un intervalle.

b) VRAI.

Prenons un intervalle fermé et borné $I = [a, b]$. Alors $a = \text{Inf } I$ et $b = \text{Sup } I$, ce qui est facile à vérifier à partir de la définition de Inf et Sup d'un sous-ensemble de \mathbb{R} (voir les notes du cours 28.09.2016). Donc on a $a = \text{Inf } I \in I$ et $b = \text{Sup } I \in I$.

c) FAUX.

Prenons $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. On a bien $A \subset \mathbb{R}$ ainsi que $\text{Sup } A \in A$ et $\text{Inf } A \notin A$ mais A n'est pas un intervalle semi-ouvert, c'est un ensemble de rationnels.

d) VRAI.

Par définition des bornes inférieures et supérieures, A est non vide. De plus $\text{Sup } A$ et $\text{Inf } A$ sont par définition respectivement un majorant et un minorant de A . Ainsi, en notant $M = \text{Sup } A = \text{Inf } A$ on a $\forall x \in A, M \leq x \leq M$. On en déduit que $A = \{M\}$ et donc que A est un point.

e) FAUX.

Contre-exemple : $A = \{0\}$.

f) FAUX.

Contre-exemple : $A = [0, 1[$.

Exercice 6. (Ecart)(*) Soit A une partie non-vide et bornée de \mathbb{R} . On note $B = \{|x - y| : (x, y) \in A^2\}$.

1. Justifier que B est majoré.
2. Prouver que $\text{Sup } B = \text{Sup}(A) - \text{Inf}(A)$.

Sol.

1. Soient $(x, y) \in A^2$ et soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \in A \Rightarrow |x| \leq M$. Alors on a

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M,$$

ce qui prouve que B est majoré.

2. Posons $m = \inf A$ et $M = \sup A$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a

$$m \leq x \leq M \text{ et } -M \leq -y \leq -m \Rightarrow -(M - m) \leq x - y \leq M - m$$

d'où l'on tire $|x - y| \leq M - m$. On en déduit donc que $M - m$ est un majorant de B et que $\sup B \leq M - m$. Pour prouver l'autre inégalité, on fixe $\varepsilon > 0$ et on construit un élément $b \in B$ tel que $b > M - m - \varepsilon$. Pour cela, on sait qu'il existe $(x, y) \in A^2$ tel que

$$x \geq M - \varepsilon/2 \text{ et } y \leq m + \varepsilon/2.$$

Alors $x - y \geq M - m - \varepsilon$, ce qui est le résultat voulu. On a bien $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice 7. (Intervalles)

Pour chacun des sous-ensembles de \mathbb{R} ci-dessous, essayer de les exprimer en termes de réunions ou d'intersections d'intervalles (ouverts, fermés ou non)

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1000\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 100\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 27\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 33\}$.

e) $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

f) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| < 7\}$.

g) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

h) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

i) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 1\}$.

j) $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$

k) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}$.

l) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 \geq 3\}$

Sol.:

a) $A =]-1000, 1000[$.

b) $B =]-\infty, -10] \cup [10, +\infty[$.

c) $C = [3, 3] = \{3\}$.

d) $D =]-\infty, 33[\cup]33, +\infty[$.

e) $E = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}}]i, i + 1[$

f) $G =]-3, 11[$.

g) $H =]-\infty, 1[$

h) $I =]-\infty, 1]$

i) $J = [-1, +\infty[$

j) $K = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

k) $L =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

l) $M =]-\infty, -\sqrt[3]{3}]$

Exercice 8. (Valeur absolue) Soient x et y deux nombres réels. Démontrer que

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{et} \quad \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Sol.

On va séparer deux cas :

— Si $x \geq y$, alors $x - y \geq 0$ et donc $|x - y| = x - y$. On a aussi $\max\{x, y\} = x$ et

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x.$$

— Si $x < y$, alors $|x - y| = y - x$ et $\max\{x, y\} = y$. Dans ce cas

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + y - x) = y.$$

Dans les deux cas, on a bien démontré la relation demandée. La démonstration pour le minimum est exactement similaire.