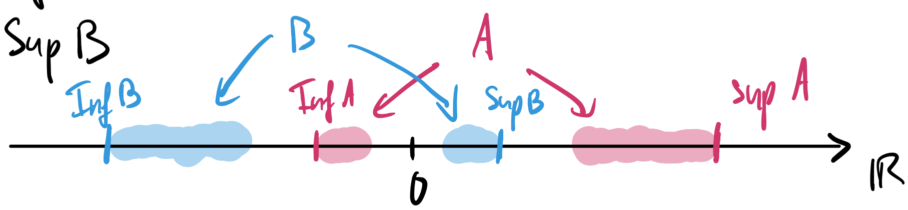
Pour se convaincre de (*), supposons $a \in \mathbb{R}$ satisfait non(*), c'est à dire
$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in A$, $x > a+\varepsilon$
cela implique $a+\varepsilon$ est un minorant de A, donc a n'est pas l'infimum de A. [Ainsi, non(*) $\Rightarrow a \neq \operatorname{Inf} A$ donc $a = \operatorname{Inf} A \Rightarrow$ (*)

De manière analogue :

Def : le supremum de A est, s'il existe, le plus petit des majorants de A.
Thm : Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet un supremum dans $\mathbb{R}$.

Lien entre inf et sup : soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$

alors $\begin{cases} \operatorname{Sup} A = -\operatorname{Inf} B \\ \operatorname{Inf} A = -\operatorname{Sup} B \end{cases}$



Propriétés :
- $\forall x \in A$, $x \leq \sup A$
- $\forall b$ majorant de A, $b \geq \sup A$

(analogue de (*)) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tel que $\operatorname{Sup} A - \varepsilon \leq x$

Convention :
- Si A n'est pas minoré, on écrit $\operatorname{Inf} A = -\infty$.
- Si A n'est pas majoré, on écrit $\operatorname{Sup} A = +\infty$.

Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$

$$[x > 0 \text{ et } \sin(\tfrac{1}{x}) = 0] \Leftrightarrow [x > 0 \text{ et } \tfrac{1}{x} = k\pi, k \in \mathbb{Z}]$$
$$\Leftrightarrow [\tfrac{1}{x} = k\pi, k \in \mathbb{N}^*] \Leftrightarrow [x = \tfrac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}^*]$$

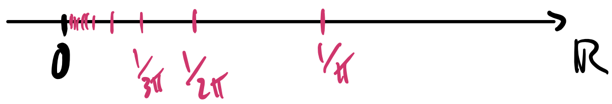
donc $A = \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}^*\}$

On a <u>A est majoré</u> et <u>$\sup A = \max A = \frac{1}{\pi}$</u>

On a A est minoré, par exemple 0 est un minorant de A.

Or $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k\pi} < \varepsilon$, donc ε n'est pas un minorant de A.

Donc 0 est le plus grand minorant de A, c-à-d. $\inf A = 0$.



Remarquez que $0 \notin A$ donc A n'admet pas de minimum.

1.2 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ $\quad$ $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ $\quad$ $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

Intervalle : ensemble des points entre 2 bornes. Soit $a \leq b$:

$]a, b[\; = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ouvert

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ fermé

$[a, b[\; = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ni ouvert ni fermé

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ fermé (complémentaire $]b, +\infty[$ ouvert)

$]a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ouvert

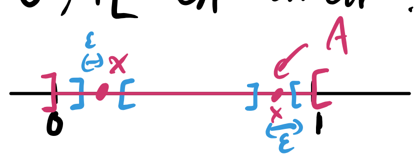
etc ...

Remarque : $]a, a[\; = \emptyset$ et $[a, a] = \{a\}$

Definition : • $A \subset \mathbb{R}$ est appelé ouvert si $\forall x \in A$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\; \subset A$.

• $A \subset \mathbb{R}$ est appelé fermé si $\mathbb{R} \setminus A$ est ouvert.

Exemple : $A = \,]0, 1[$ est ouvert.



Soit $x \in A$ — si $x \leq \frac{1}{2}$, on prend $\varepsilon = \frac{x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[\subset A$

— si $x > \frac{1}{2}$, on prend $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$ on a $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$

Autres exemples : ouverts : $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $]-3,2[\cup]\sqrt{2}, e[$, $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

fermés : $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $\{3\} \cup [-1,0]$

Remarque : $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont les seuls ensembles ouverts et fermés à la fois.

Certains ensembles sont ni ouverts ni fermés : $[1,2[$ et $\mathbb{Q}$

Question : $A = \{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}^* \}$ ouvert ou fermé ?

- $\frac{1}{\pi} \in A$ et "est isolé", c'est-à-dire $]\frac{1}{\pi} - \varepsilon, \frac{1}{\pi} + \varepsilon[\not\subset A$, $\forall \varepsilon > 0$
donc A n'est pas ouvert.
- $0 \in \mathbb{R} \setminus A$ mais $\forall \varepsilon > 0$, $]-\varepsilon, \varepsilon[\not\subset \mathbb{R} \setminus A$
car $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k\pi} < \varepsilon$ et donc $\frac{1}{k\pi} \in]-\varepsilon, \varepsilon[$
donc $\mathbb{R} \setminus A$ n'est pas ouvert.
- A est ni ouvert ni fermé.

1.3 Quelques propriétés de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

$$\begin{cases} \exists x \in \mathbb{Q}, & x \in]a,b[\\ \exists x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, & x \in]a,b[\end{cases}$$

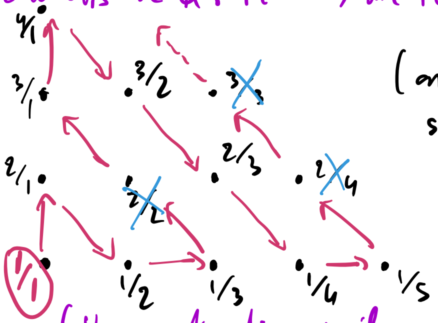
- Il y a "beaucoup plus d'irrationnels que de rationnel"...

On dit qu'un ensemble A est dénombrable s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to A$.

Proposition: (i) $\mathbb{Q}$ est dénombrable

(ii) $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

(i) Il suffit de donner une façon d'énumérer les éléments de $\mathbb{Q}$. Montrons une telle énumération pour $\mathbb{Q}_+^*$:



(on parcourt $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et l'on saute les couples qui ne forment pas une fraction irréductible)

(Une construction similaire couvre le cas de $\mathbb{Q}$).

(ii) Par l'absurde : supposons qu'il existe une façon d'énumérer les éléments de $[0,1]$:

$$x_1 = 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$
$$x_2 = 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$
$$x_3 = 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$

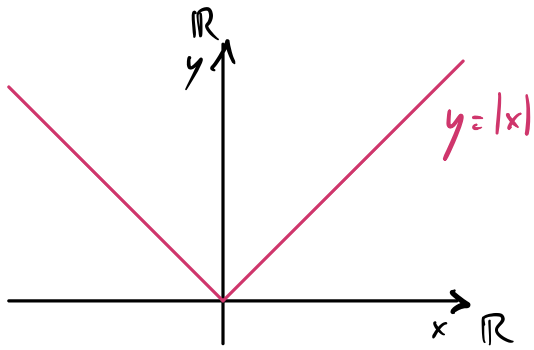
Soit $x = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ avec $b_i \neq a_{ii}$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

Alors $x \in [0,1]$ mais $x \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$ donc on n'a pas énuméré tous les éléments de $[0,1]$!

1.4 Valeur absolue

Def: La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est définie par

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



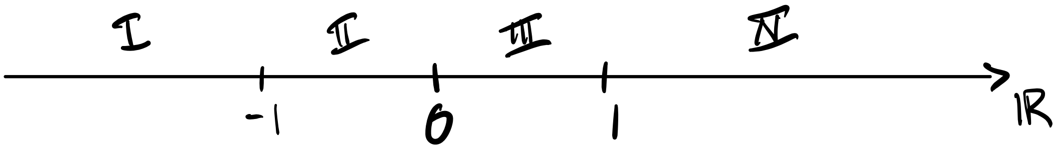
Quelques propriétés: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$|-x| = |x|$$
$$|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$$
$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Inégalités triangulaires:
$$\begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ |x-y| \geq \big||x|-|y|\big| \end{cases}$$

À maîtriser : résolution d'inéquations.

Décrire $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \neq 1 \text{ et } \frac{1}{1-|x|} < 1 \right\}$ à l'aide d'intervalles



I) Si $x < -1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1+x} < 0$ donc $]-\infty, -1[\subset A$

($x < -1$ donc $x+1 < 0$)

II) Si $-1 < x \leq 0$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1+x} \geq 1$ donc $x \notin A$

III) Si $0 \leq x < 1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-x} \geq 1$ donc $x \notin A$

IV) Si $x > 1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-x} < 0$ donc $x \in A$

V) Si $x = -1$ ou $x = 1$ alors $|x| = 1$ donc $x \notin A$

En conclusion : $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

fin cours 06/10