Corrigé 5

Exercice 1.

Solution 1. Dans cette première solution, on considère que la glace ne dépasse pas du cône. Le volume total du cône de glace est de $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 30\pi$ cm^3. On cherche donc à couper le grand cône parallèlement à sa base de sorte à obtenir un cône (de base de rayon r et de hauteur h) de volume la moitié, soit $\frac{1}{5}\pi$ cm^3—l'autre moitié formera un cône tronqué de même volume. On doit donc avoir $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 15\pi$, soit :

$$r^2 \cdot h = 45.$$

En coupe, le grand cône forme un triangle isocèle de demi-base 3 cm et de hauteur 10 cm, alors que le petit cône forme un triangle semblable de demi-base r et de hauteur h. Par similitude, $\frac{10}{h} = \frac{3}{r}$ et conséquemment $r = \frac{3 \cdot h}{10}$. L'égalité précédente devient

$$\frac{3^2 \cdot h^2}{10^2} \cdot h = 45.$$

D'où $h^3 = 500$. La hauteur à laquelle on doit couper le cône de glace est de $h = \sqrt[3]{500}$ cm à partir du sommet (c'est-à-dire l'extrémité).

Solution 2. Dans cette solution, on considère que la glace remplit le cône comme dans la première solution, mais qu'en plus une demi-boule de glace en dépasse. Dans ce cas, le volume total de glace est de $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3^3 = 48\pi\,\text{cm}^3$, et le demi-volume de $24\pi\,\text{cm}^3$. On cherche donc h tel que $\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{3h}{10}\right)^2 \cdot h = 24\pi$, soit $h = \sqrt[3]{800}$ cm.

Triche. Une autre solution beacoup plus rapide mais n'utilisant pas un plan parallèle à la base, serait de couper le cône avec un plan perpendiculaire à la base et passant par le sommet.

Exercice 2. Calculons le volume de la boule creuse. Le volume de la boule de 15 cm de rayon vaut $\dfrac{4}{3}\pi 15^3$, celui du « trou » $\dfrac{4}{3}\pi 5^3$. Ainsi la boule creuse a un volume de $\dfrac{4}{3}\pi(15^3 - 5^3)$. En multipliant par la densité on trouve la masse de la boule creuse : $\dfrac{4}{3}\pi(15^3 - 5^3)\left[\text{cm}^3\right] \cdot 2.5 \left[\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}\right] \cong 34034$ grammes $\cong 34$ kg.

Exercice 3. Afin de vérifier que $\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif, il suffit de vérifier les axiomes un à un. L'élément neutre du groupe abélien sous-jacent $(\mathbb{Z}, +)$ est 0, l'opposé d'un $a \in \mathbb{Z}$ est $-a$, l'élément neutre pour la multiplication est 1. De plus, la multiplication est commutative, et elle est bien distributive par rapport à l'addition. Pour voir que $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, il suffit de trouver un élément non-nul de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas inversible via la multiplication, autrement dit qu'il existe un $a \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \neq 1$ pour tout $b \in \mathbb{Z}$. Par exemple l'élément 2 possède clairement cette propriété.

Exercice 4.

a) $x + 1$

b) $x^2 + 2x + 1$

c) $(x + 1)^3 = (x + 1)(x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

d) $(x+1)^4 = (x+1)^3(x+1) = (x^3+3x^2+3x+1)(x+1) = x^4+3x^3+3x^2+x+x^3+3x^2+3x+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

Pour le cas $(x+1)^{10}$, il serait trop fastidieux de le calculer à la main. En revanche, nous pouvons nous appuyer sur le triangle de Pascal afin de trouver les coefficients de $(x + 1)^{10}$. Voici le triangle de Pascal jusqu'à la dixième ligne ; nous rappelons que chaque nombre est obtenu en faisant la somme des deux nombres situés en-dessus de lui.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Pour écrire $(x+1)^{10}$, nous regardons donc la dixième ligne du triangle qui nous en donne les coefficients.

$$(x+1)^{10} = x^{10} + 10x^9 + 45x^8 + 120x^7 + 210x^6 + 252x^5 + 210x^4 + 120x^3 + 45x^2 + 10x + 1.$$

Exercice 5.

a) $x^4 - 1$

b)
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{4}(x+1)^k &= (x+1)^{\left(\sum_{k=1}^{4} k\right)} = (x+1)^{10} \\ &= x^{10} + 10x^9 + 45x^8 + 120x^7 + 210x^6 + 252x^5 + 210x^4 + 120x^3 + 45x^2 + 10x + 1.\end{aligned}$$