Corrigé Test 1 - Probabilités et statistiques 29.09.21

Le test dure 90 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée. Justifiez tous vos calculs.

Exercice 1. *(8 points)*

Julien souhaite inviter des amis à souper chez lui. Etant donné la taille de son appartement, il va devoir choisir 6 personnes parmi 5 femmes et 4 hommes.

a) Combien y-a-t-il de possibilités pour Julien d'inviter 6 personnes s'il n'y a aucune restriction ? $C_6^9 = 84$ possibilités

b) Combien y-a-t-il de possibilités pour Julien d'inviter 6 personnes s'il ne peut pas recevoir Anne et Catherine ensemble ?

(Cas Avec Anne, sans Catherine)+(Cas Sans Anne, avec Catherine)+(Cas Sans Anne, sans Catherine)$= C_5^7 + C_5^7 + C_6^7 = 21 + 21 + 7 = 49$ possibilités

ou (Cas Sans restriction)$-$(Cas Avec Anne, avec Catherine)$= C_6^9 - C_4^7 = 84 - 35 = 49$ possibilités

c) Combien y-a-t-il de possibilités pour Julien d'inviter exactement 3 femmes et 3 hommes, s'il ne peut pas recevoir Anne et Quentin ensemble ?

(Cas Avec Anne, sans Quentin)+(Cas Sans Anne, avec Quentin)+(Cas Sans Anne, sans Quentin)$= C_2^4 \cdot C_3^3 + C_3^4 \cdot C_2^3 + C_3^4 \cdot C_3^3 = 6 + 12 + 4 = 22$ possibilités

ou (Cas 3 Hommes, 3 Femmes)$-$(Cas Avec Anne, avec Quentin)$= C_3^5 \cdot C_3^4 - C_2^4 \cdot C_2^3 = 40 - 18 = 22$ possibilités

d) Quelle est la probabilité que parmi les 6 personnes invitées il y ait au moins 3 femmes ?

(Cas Avec 3 femmes)+(Cas Avec 4 femmes)+(Cas Avec 5 femmes)$= C_3^5 \cdot C_3^4 + C_4^5 \cdot C_2^4 + C_5^5 \cdot C_1^4 = 40 + 30 + 4 = 74$ possibilités

ou (Cas Sans restriction)$-$(Cas Avec 2 femmes)$= C_6^9 - C_2^5 \cdot C_4^4 = 84 - 10 = 74$ possibilités

Ainsi, $P(\text{au moins 3 femmes}) = \dfrac{74}{84} = 88,1\%$

Exercice 2. *(12 points)*

On lance deux dés à 6 faces. On considère la variable aléatoire X qui représente la somme des résultats des deux dés et la variable aléatoire Y qui compte le nombre de faces avec le numéro "6" obtenues.

a) Déterminer les valeurs possibles pour X et pour Y, ainsi que les probabilités associées à chaque valeur.

Pour X :

k	$P(X = k)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Pour Y :

k	$P(Y = k)$
0	25/36
1	10/36
2	1/36

b) Déterminer l'espérance et la variance des variables X et Y.

$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$

$E[X^2] = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 12^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}$

$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$

$E[Y] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 0 \cdot \frac{25}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$E[Y^2] = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 0^2 \cdot \frac{25}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

$\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{7}{18} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}$

c) Déterminer la corrélation de X et Y.

Pour calculer la corrélation, on a besoin de $E[XY]$. Les cas où $Y = 0$ vont tomber, et les cas où X est plus petit que 7 sont de probabilité nulle. On a donc

$$E[XY] = 7 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 8 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 9 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 10 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 11 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{114}{36} = \frac{19}{6}.$$

Ainsi, $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{19}{6} - 7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ et donc

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{\frac{35}{6}}\sqrt{\frac{5}{18}}} \cong 0,65$$

d) Est-ce qu'on pourrait approximer la variable Y en fonction de la variable X ? Justifier.

Non, car les variables X et Y ne sont pas assez corrélées.

Exercice 3. *(4 points)*

Démontrer

$$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

On utilise que $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ et la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX+b) &= E[(aX+b)^2] - (E[aX+b])^2 = E[a^2X^2 + 2abX + b^2] - (aE[X]+b)^2\\ &= a^2E[X^2] + 2abE[X] + b^2 - (a^2(E[X])^2 + 2abE[X] + b^2)\\ &= a^2(E[X^2] - (E[X])^2) = a^2\mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

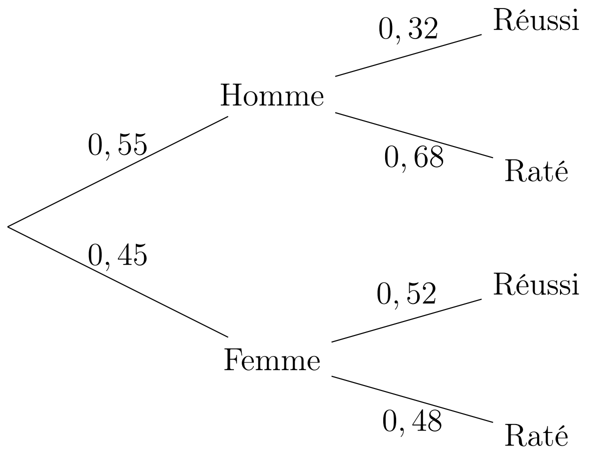
Exercice 4. *(1 points)*

De combien de façons peut-on distribuer 22 canettes de soda à quatre personnes (chaque personne peut ne pas recevoir de canettes) ?
Il y en a $C_3^{25} = 2300$.

Exercice 5. *(8 points)*

En 2012, 55% des candidats se présentant pour la première fois à l'examen du permis de conduire théorique étaient des hommes. Seuls 32% des hommes et 52% des femmes ont réussi cet examen du premier coup. On choisit au hasard une personne parmi les candidats.

a) Montrer que la probabilité que la personne ait réussi est de 41%.
On peut s'aider d'un arbre pour résoudre l'exercice :



Ainsi, en utilisant la formule des probabilités totales, on a

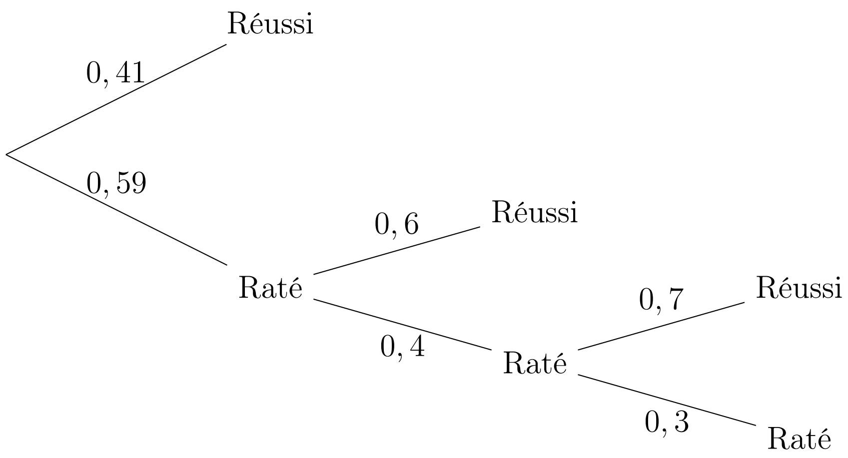
$$\begin{aligned}P(\text{Réussi}) &= P(\text{Réussi} \mid \text{Homme}) \cdot P(\text{Homme}) + P(\text{Réussi} \mid \text{Femme}) \cdot P(\text{Femme})\\ &= 0,32 \cdot 0,55 + 0,52 \cdot 0,45 = 0,41 = 41\%\end{aligned}$$

b) Sachant que la personne a réussi son examen, quelle est la probabilité que ce soit un homme ?
Avec le même arbre, on obtient

$$P(\text{Homme} \mid \text{Réussi}) = \frac{P(\text{Homme} \cap \text{Réussi})}{P(\text{Réussi})} = \frac{P(\text{Réussi} \mid \text{Homme}) \cdot P(\text{Homme})}{P(\text{Réussi})}$$
$$= \frac{0,32 \cdot 0,55}{0,41} \cong 0,4293 = 42,93\%$$

Lorsqu'un candidat ayant échoué à sa première tentative se présente une deuxième fois à l'examen, sa probabilité de réussite passe alors de 41% à 60% et elle grimpe à 70% lors de la troisième tentative.

c) Quel est alors le taux de réussite après trois tentatives au maximum ?
On peut s'aider d'un nouvel arbre :



Ainsi, on obtient

$$P(\text{Réussi après 3 tentatives au maximum})$$
$$= P(\text{Réussi au 1er coup}) + P(\text{Réussi au 2ème coup}) + P(\text{Réussi au 3ème coup})$$
$$= 0,41 + 0,59 \cdot 0,6 + 0,59 \cdot 0,4 \cdot 0,7 = 0,9292 = 92,92\%$$

Exercice 6. *(5 points)*

Chaque étudiant d'un gymnase reçoit en début d'année scolaire un code informatique composé de 4 lettres minuscules (choisies parmi les 20 consonnes et 6 voyelles de notre alphabet), suivi de 4 chiffres. Le code peut contenir plusieurs fois une même lettre ou un même chiffre, comme par exemple le code abad0225.

a) Combien existe-t-il de codes différents ?
$26^4 \cdot 10^4 = 4'569'760'000$ possibilités

b) Combien existe-t-il de codes différents dont les 4 lettres sont identiques et les 4 chiffres distincts ?
$26 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 26 \cdot A_4^{10} = 131'040$ possibilités

c) Combien existe-t-il de codes différents dont les 4 lettres sont distinctes avec pour première lettre une consonne et pour deuxième lettre une voyelle ?
$20 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 20 \cdot 6 \cdot A_2^{24} \cdot 10^4 = 662'400'000$ possibilités

Exercice 7. *(5 points)*

Loi de De Morgan. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^c$$

On le montre grâce à la "double-inclusion". Montrons d'abord que $(\bigcup_{i=1}^n E_i)^c \subset \bigcap_{i=1}^n E_i^c$. Considérons un élément x de $(\bigcup_{i=1}^n E_i)^c$. On a

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^c &\Rightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i \\ &\Rightarrow x \notin E_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ &\Rightarrow x \in E_i^c \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\cap_{i=1}^n E_i^c \subset (\cup_{i=1}^n E_i)^c$. Considérons un élément x de $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$. On a

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c &\Rightarrow x \in E_i^c \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ &\Rightarrow x \notin E_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ &\Rightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i \\ &\Rightarrow x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^c. \end{aligned}$$

Remarque : On aurait très bien pu montrer cette loi directement en utilisant des équivalences.