Corrigé 4 : problèmes à contraintes

1. **Changement de repère et systèmes de coordonnées**

   (a) Dans le repère $Oxyz$, notre vecteur s'écrit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{Oxyz} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}\,.$$

Comme il a été vu au cours, la composante d'un vecteur $\vec{a}$ selon un axe u se trouve en utilisant le produit scalaire entre $\vec{a}$ et le vecteur unitaire

$$\hat{u}:\ \ a_u = (\vec{a}\cdot\hat{u})\hat{u}\,.$$

La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Ox' vaut :

$$v_1' = \vec{v}\cdot\hat{x}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z})\cdot\hat{x}' = v_1(\hat{x}\cdot\hat{x}') + v_2(\hat{y}\cdot\hat{x}') + v_3(\hat{z}\cdot\hat{x}')\,.$$

La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Oy' vaut :

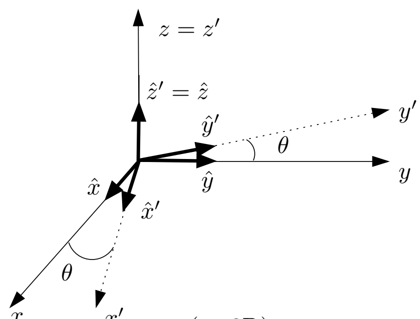
$$v_2' = \vec{v}\cdot\hat{y}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z})\cdot\hat{y}' = v_1(\hat{x}\cdot\hat{y}') + v_2(\hat{y}\cdot\hat{y}') + v_3(\hat{z}\cdot\hat{y}')\,.$$

La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Oz' vaut :

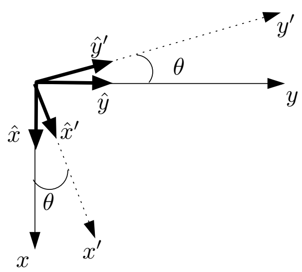
$$v_3' = \vec{v}\cdot\hat{z}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z})\cdot\hat{z}' = v_1(\hat{x}\cdot\hat{z}') + v_2(\hat{y}\cdot\hat{z}') + v_3(\hat{z}\cdot\hat{z}')\,.$$

Calculons $\hat{x}\cdot\hat{x}'$: on utilise la définition du produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$ où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Dans notre cas, l'angle entre $\hat{x}$ et $\hat{x}'$ vaut θ (voir les deux figures ci-dessous). Les vecteurs unitaires étant par définition de norme 1, le produit scalaire s'écrit

$$\hat{x}\cdot\hat{x}' = \cos\theta\,.$$



(en 3D)



(en 2D, dans le plan Oxy)

De la même manière, on trouve

$$\hat{y}\cdot\hat{y}' = \cos\theta\ ,\ \ \hat{x}\cdot\hat{y}' = \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta\ \text{ et }\ \hat{y}\cdot\hat{x}' = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta\,.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul. Le vecteur $\hat{z} = \hat{z}'$ est orthogonal à $\hat{x}$, $\hat{x}'$, $\hat{y}$ et $\hat{y}'$. Tous les autres produits scalaires sont donc nuls, sauf le terme $\hat{z} \cdot \hat{z}'$ qui vaut 1.

Dans le repère $Ox'y'z'$, le vecteur $\vec{v}$ s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}_{Ox'y'z'} = \begin{pmatrix} v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta \\ -v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

(b) La projection du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur les axes cartésiens en fonction des paramètres des coordonnées cylindriques (voir figure ci-dessous) s'écrit :

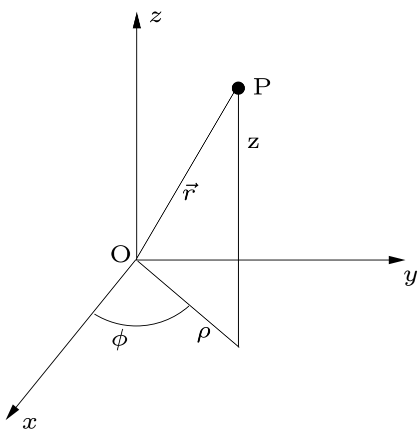
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix},$$

où $\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$.

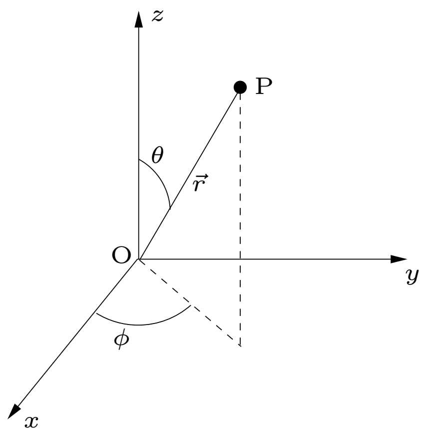
La projection du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur les axes cartésiens en fonction des paramètres des coordonnées sphériques (voir figure ci-dessous) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

où l'on a introduit dans les coordonnées précédentes l'expression de la longueur ρ : $\rho = r\sin\theta$.



(coordonnées cylindriques)



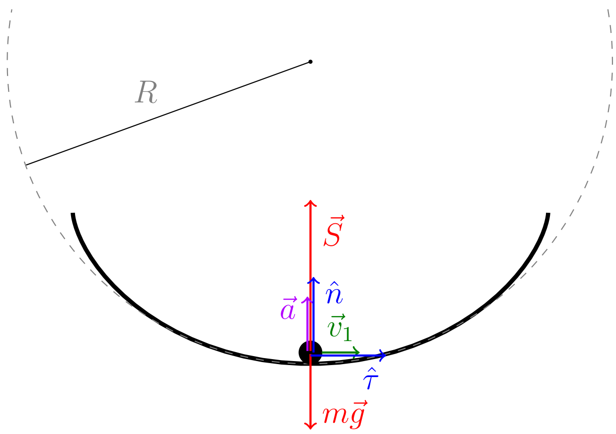
(coordonnées sphériques)

2. **Accélération normale**

En l'absence de tout frottement, la bille subit deux forces lors de son déplacement sur le rail : la force de gravitation, $m\vec{g}$, et la force $\vec{S}$ de soutien du rail. La deuxième loi de Newton s'écrit ainsi

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

Durant le mouvement de la bille, la force de gravitation est toujours verticale (le vecteur $\vec{g}$ est toujours vertical), alors que la force de soutien du rail est toujours perpendiculaire au rail. Au point le plus bas, les deux forces sont donc perpendiculaires à la trajectoire :



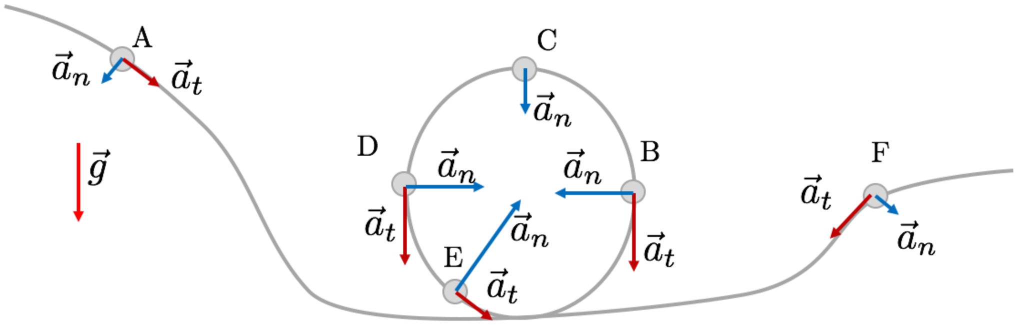
A cet endroit, le vecteur accélération est donc lui aussi vertical (perpendiculaire à la trajectoire) et l'équation de Newton projetée selon le vecteur $\hat{n}$ permet d'obtenir l'expression de la norme de la force de soutien :

$$-mg + S = ma = ma_n \quad \Rightarrow \quad S = mg + ma_n = mg + m\frac{v_1^2}{R} = m(g + \frac{v_1^2}{R})\,,$$

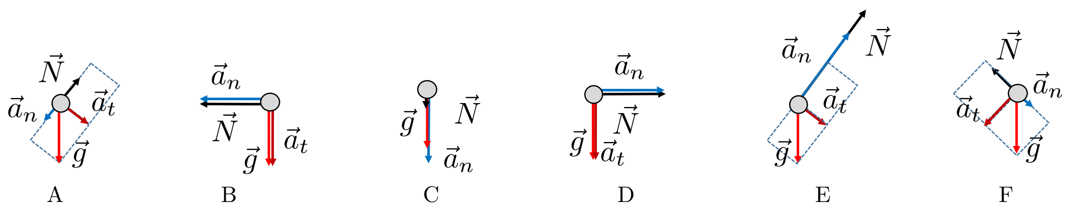
où $v_1 = ||\vec{v}_1||$.

3. **Looping**

(a) La figure ci-dessous donne les vecteurs accélérations normales $\vec{a}_n$ et tangentielles $\vec{a}_t$ du wagonnet allant de A à F lorsque la trajectoire est dans un plan vertical.



La figure suivante permet d'analyser la situation point par point. Le vecteur $\vec{N}$ représente la force liée à la contrainte géométrique et $\vec{g}$ est l'accélération due à l'attraction terrestre. On a considéré une masse m unité. Le rectangle qui apparaît pour certains points correspond à la décomposition du vecteur $\vec{g}$ en ses composantes normales et tangentielles au mouvement.



Le wagonnet subit deux forces : son poids $m\vec{g}$ et la force de liaison $\vec{N}$, donc $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$, c'est-à-dire $\vec{a} = \vec{g} + \vec{N}/m$.

Rappelons que $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$ sont les composantes de $\vec{a}$ parallèle et perpendiculaire à la vitesse ; et aussi que $\vec{a}_n$ est dirigé vers le centre de courbure avec une norme égale à v^2/R et que $\vec{a}_t = dv/dt\ \vec{v}/v$, où v est la norme de la vitesse.

(b) Lorsque le wagonnet se déplace de F à A les accélérations sont identiques à celles qui caractérisent son déplacement de A à F (pour autant que la vitesse initiale du mouvement de F à A soit un vecteur opposé à la vitesse finale du mouvement de A à F).

(c) Dans le cas d'une piste se trouvant dans un plan horizontal, l'accélération tangentielle est nulle car car $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont tous deux perpendiculaires à la piste. C'est la composante horizontale N_h de $\vec{N}$ qui cause l'accélération normale (voir les figures ci-dessous). La norme de la vitesse est constante, et donc a_n a une norme inversement proportionnelle au rayon de courbure ; ceci explique pourquoi la norme de a_n est la même aux points B, C, D et E.