Résumé semaines 01 — 03

- But de la mécanique Newtonienne :

1. Décrire mathématiquement le mouvement de points matériels et de solides par rapport au référentiel choisi
2. Faire le lien entre ce mouvement et les forces appliquées

   => Trois lois de Newton (rien de plus !)

Exemple déjà traité : masse ponctuelle attachée à un ressort

- Forces: rappel du ressort, gravité, réaction du support, frottements
- Equation du mouvement => décrit des oscillations sinusoïdales autour d'une position d'équilibre

Suite du cours

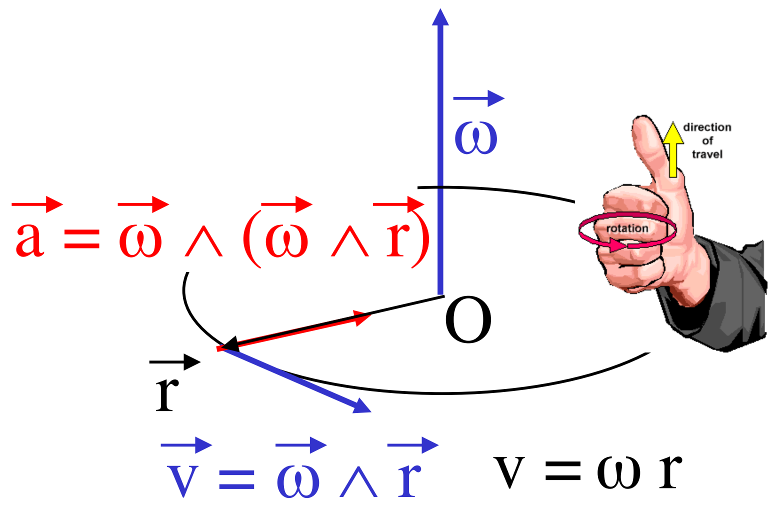
- Traiter le mouvement de **solides indéformables** (ensembles de points matériels rigidement liés entre eux)
- Développer des **outils mathématiques** pour traiter des mouvements plus généraux, par rapport à différents référentiels (c'est à dire différents points d'observation)
- Introduire de nouvelles notions et théorèmes pour **faciliter la résolution de problèmes** (pas de nouvelles lois !)
- En ce faisant, gagner progressivement une **intuition physique**

Exemples de nouveaux outils et nouvelles notions:

- Vecteur rotation instantané
- Moment cinétique et moment des forces
- Energie cinétique et énergie potentielle

Retour semaine 03 : mouvement circulaire uniforme

- Dans ce cas $\vec{\omega}$ est constant



$$v = \omega\, r$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

Vitesse : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Accélération : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$

Semaine 04

Coordonnées cylindriques et sphériques
Forces de liaisons et contraintes

https://wiki.epfl.ch/mooc-mecanique/

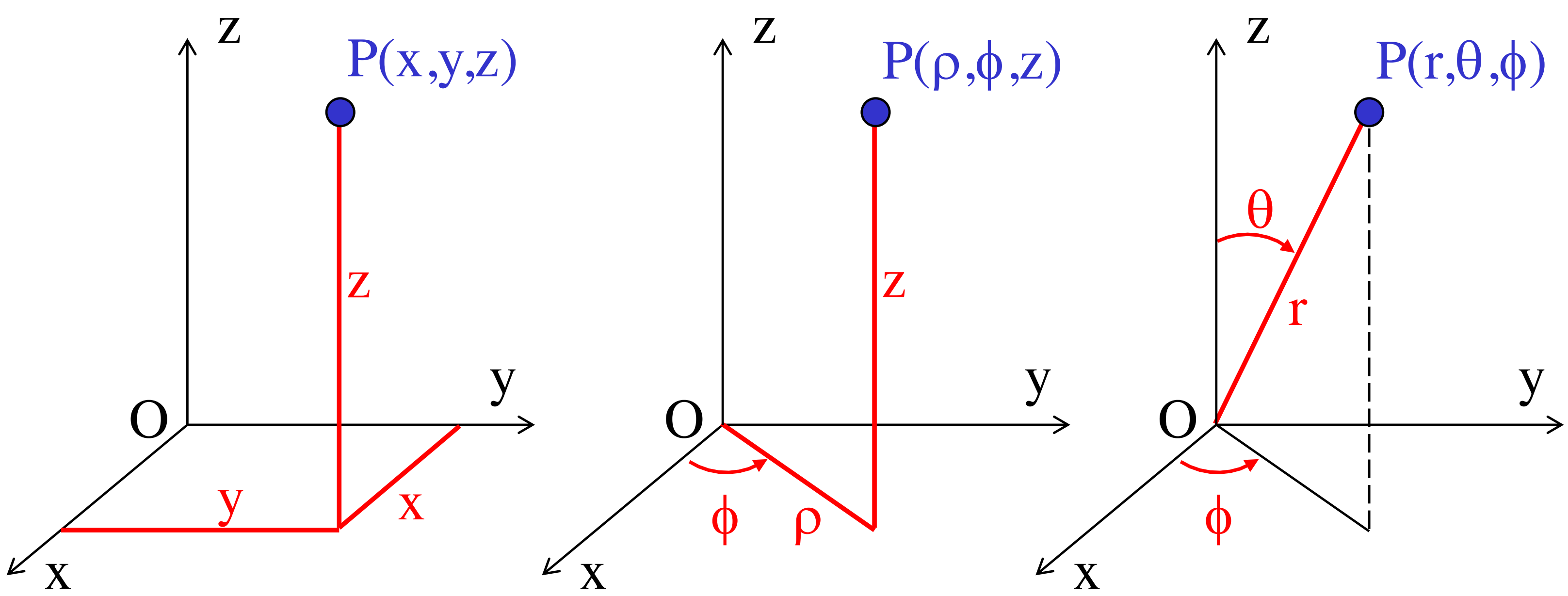
Coord. cylindriques et sphériques : Cours 7

p 82, Section 2.2
p 14, Section 1.6, 1.7, 1.8

EPFL

Systèmes de coordonnées

*à un certain temps t, des points du référentiel au moyen de **trois nombres réels**.*

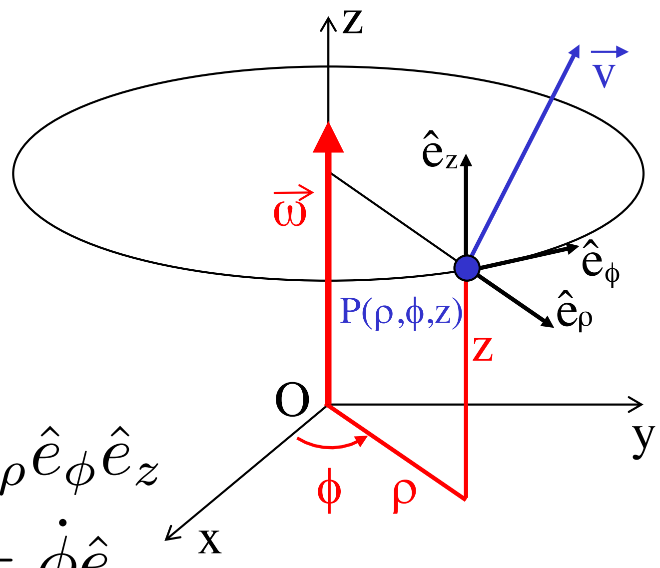


- Exemples fondamentaux:
  - Coordonnées cartésiennes (x, y, z) fixes ou en mouvement
  - Coordonnées cylindriques $(\rho \geqslant 0, \phi \in [0, 2\pi[, z)$
  - Coordonnées sphériques $(r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi[)$

Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

- Point en mouvement, décrit en coordonnées cylindriques

Vitesse radiale : $\vec{v} \cdot \hat{e}_\rho$
Vitesse transverse : $\vec{v} \cdot \hat{e}_\phi$
Accélération radiale : $\vec{a} \cdot \hat{e}_\rho$
Accélération transverse : $\vec{a} \cdot \hat{e}_\phi$



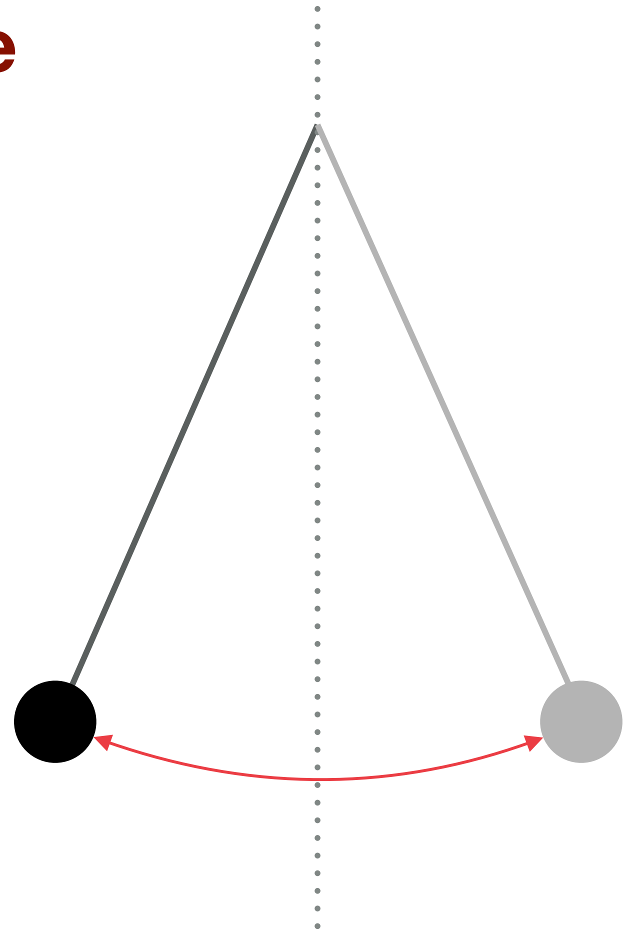
Repère en mouvement associé au point P : $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$

Repère en rotation à la vitesse $\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_z = \dot{\phi}\hat{e}_z$

$$\vec{r} = \vec{OP} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$$
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$$

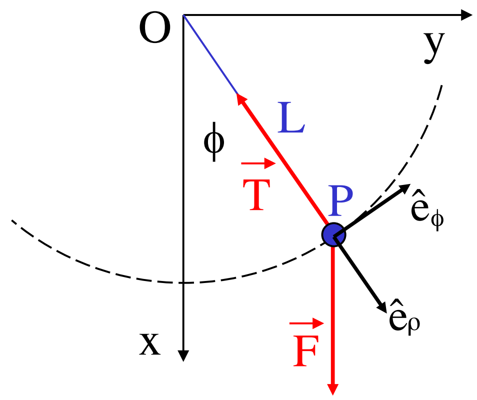
EPFL

Exemple: le pendule



mouvement contraint dans un plan

Exemple: le pendule



- Aucun mouvement dans la direction z
- Repère cartésien fixe $O\hat{e}_x\hat{e}_y\hat{e}_z$
- Repère en mouvement $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$
- Contraintes: $\rho = L$ est une constante
  $\dot{\rho} = 0; \ddot{\rho} = 0$
- Accélération: $\vec{a} = -L\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + L\ddot{\phi}\hat{e}_\phi$
- 2eme loi de Newton: $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$
- Projection sur les axes du repère en mouvement

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -mL\dot{\phi}^2 & = & F\cos\phi - T \\ mL\ddot{\phi} & = & -F\sin\phi \end{array} \right.$$

Exemple: le pendule

- Force de pesanteur $F = mg$

$$\ddot{\phi} = -\frac{F}{mL}\sin\phi = -\frac{g}{L}\sin\phi$$

Le mouvement du pendule ne dépend pas de la masse !

- Solution: mouvement périodique. La solution exacte est une fonction compliquée (intégrale elliptique)
- Approximation des petites oscillations $\phi \to 0 \implies \sin\phi \sim \phi$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\phi = 0$$

On retrouve l'oscillateur harmonique de pulsation $\sqrt{g/L}$

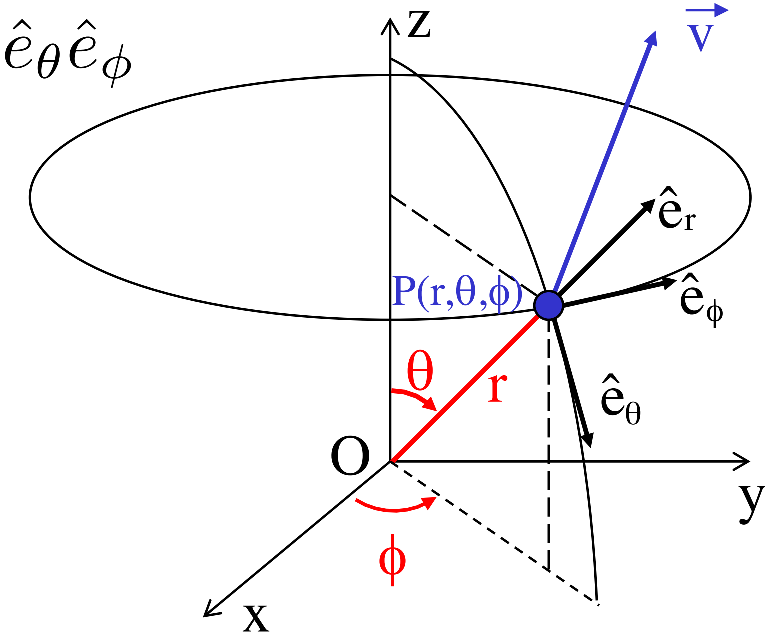
Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

- Point en mouvement, décrit en coordonnées sphériques

Repère en mouvement associé au point P : $O\hat{e}_r\hat{e}_\theta\hat{e}_\phi$

Projection sur le sytème cartésien:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$



Vitesse de rotation du repère:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_z + \dot{\theta}\hat{e}_\phi$$

Une rotation infinitésimale est composée de :

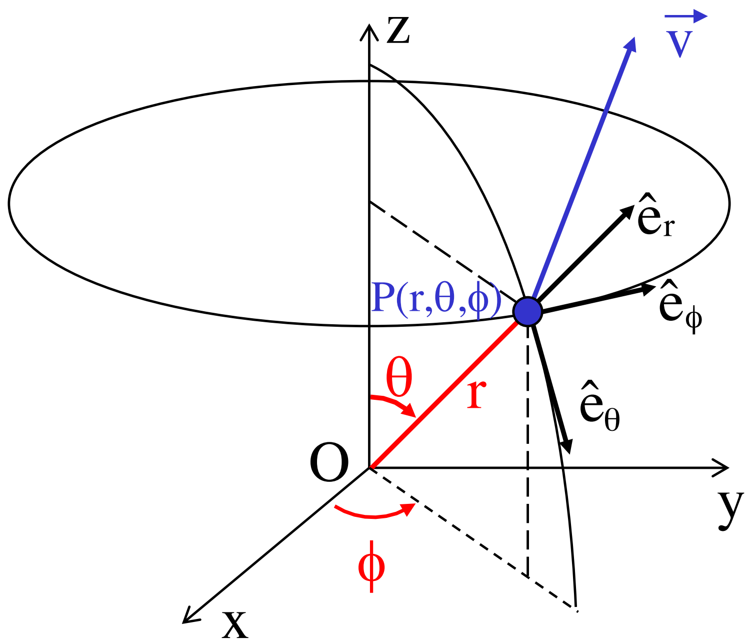
$$\begin{cases} d\vec{r}_1 &= d\phi\hat{z}\wedge\vec{r} \\ d\vec{r}_2 &= d\theta\hat{e}_\phi\wedge\vec{r} \end{cases}$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = (d\theta\hat{e}_\phi + d\phi\hat{z})\wedge\vec{r}$$

Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

- Evolution des vecteurs de base: formules de Poisson avec

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_z + \dot{\theta}\hat{e}_\phi$$



$$\vec{r} = r(t)\,\hat{e}_r(t)$$

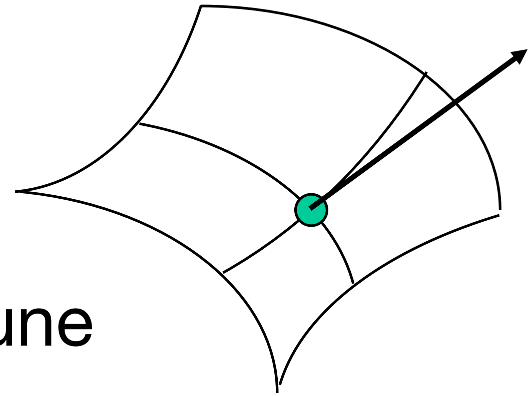
$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$ Accélération radiale

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta$$ Accélération méridienne

$$a_\phi = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta$$ Accélération transverse

Contraintes et forces de liaison



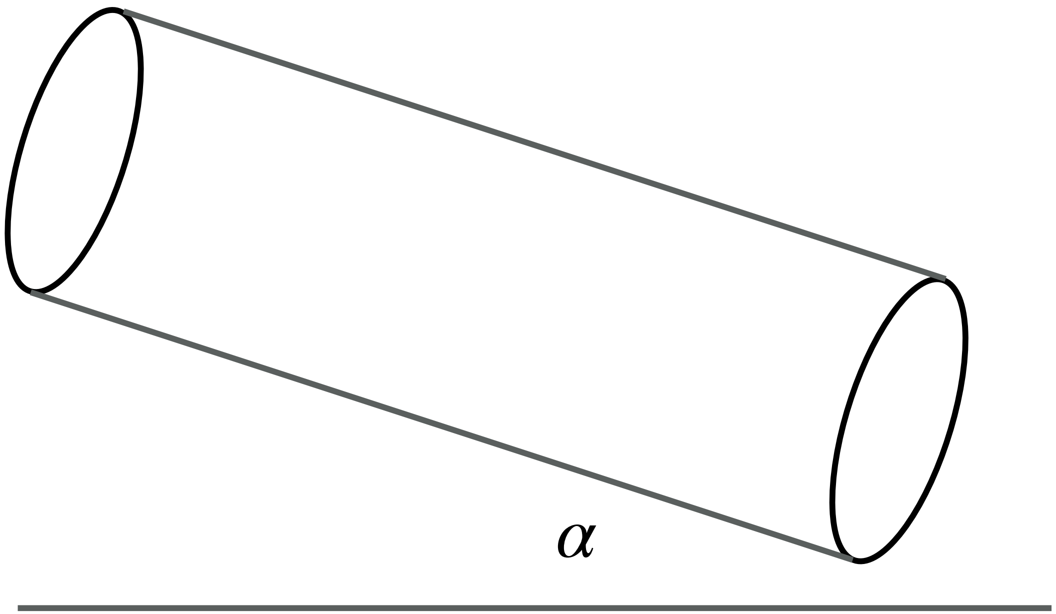
- Un point matériel astreint à se déplacer sur une surface ou une courbe :
  - Exemple du pendule: la tige contraint la distance entre le point de fixation et le point matériel
  - Véhicule sur une route

- Force de liaison: force nécessaire pour maintenir la contrainte
  - Toujours **perpendiculaire** à la surface ou à la courbe, jamais de composante tangente
  - Lorsque la force devient nulle, la contrainte disparait
  - Attention: il peut exister des **forces tangentes (ex: frottements), mais ce ne sont pas des forces de liaison**

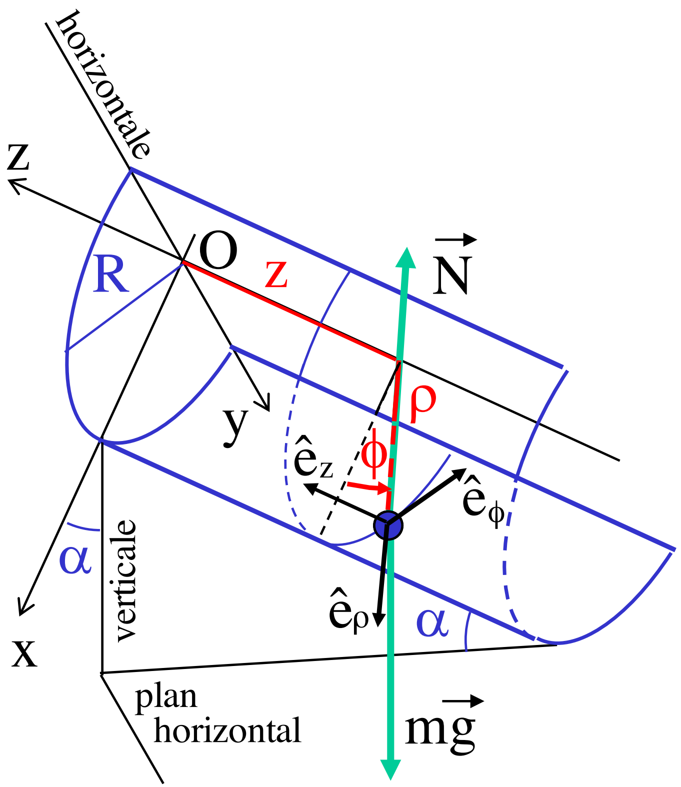
Exemple 1 : point matériel dans un tube cylindrique

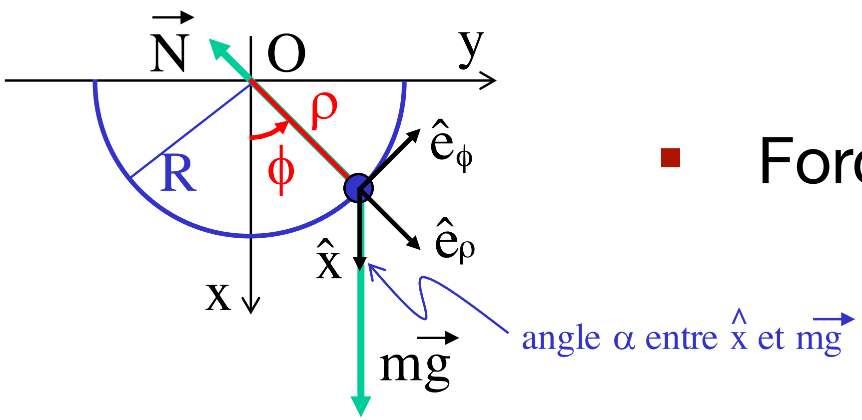
Un point matériel de masse m glisse sans frottement à l'intérieur d'un tube cylindrique lui-même incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal

A. Faire un dessin et le bilan des forces
B. Choisir un repère adapté et y projeter les équations du mouvement
C. Décrire le mouvement obtenu; à quelle condition savez-vous résoudre analytiquement les équations du mouvement ?



Exemple 1 : point matériel dans un tube cylindrique





- Repère lié à la piste $Oxyz$
- Coordonnées cylindriques $\rho,\ \phi,\ z$
- Contrainte: le point reste sur le cylindre

$$\dot{\rho} = 0;\ \ddot{\rho} = 0$$

- Repère en mouvement avec le point

$$O\hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$$

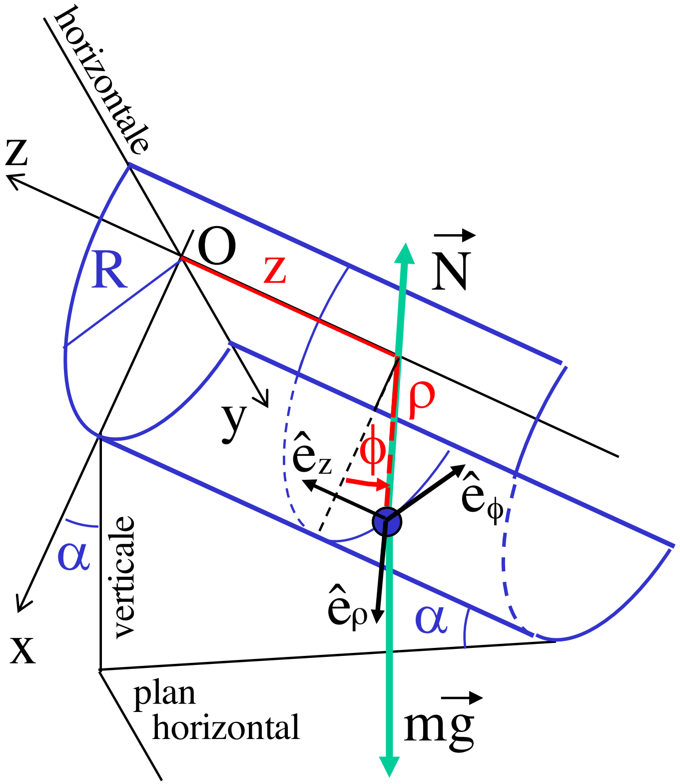
- Forces: pesanteur $m\vec{g}$, liaison $\vec{N}$
- Gravité dans le repère $Oxyz$

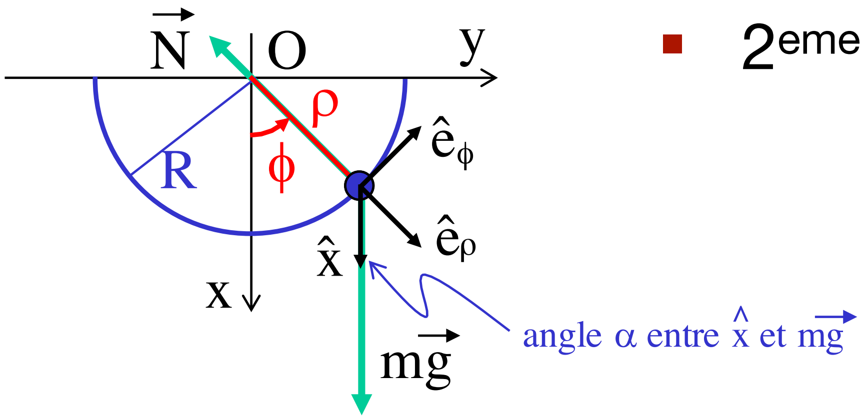
$$m\vec{g} = mg(\cos\alpha\hat{x} - \sin\alpha\hat{z})$$

- Force de liaison

$$\vec{N} = -N\hat{e}_\rho$$

Exemple 1 : point matériel dans un tube cylindrique





- Projection de la gravité dans le repère mobile:

$$m\vec{g} = mg(\cos\alpha\cos\phi\hat{e}_\rho - \cos\alpha\sin\phi\hat{e}_\phi - \sin\alpha\hat{z})$$

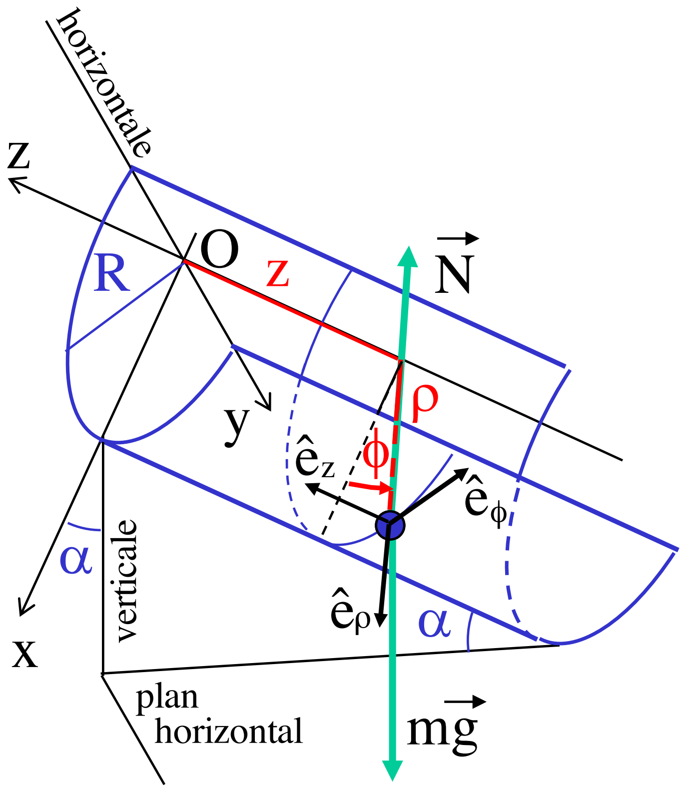
- Accélération dans le repère mobile

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$$

- 2eme loi de Newton

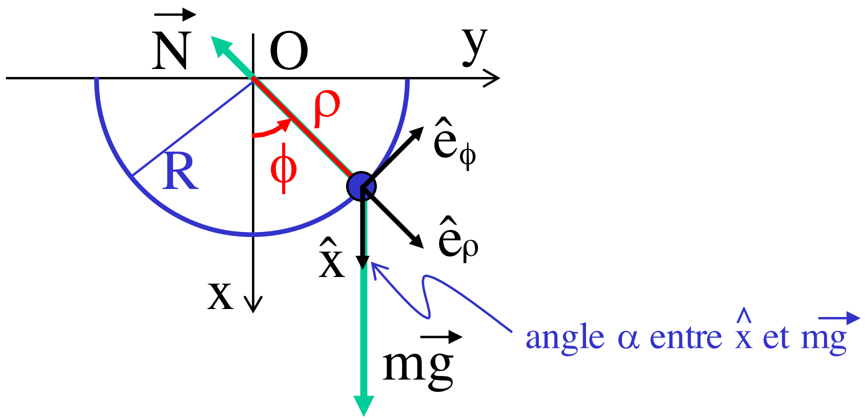
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

Exemple 1 : point matériel dans un tube cylindrique

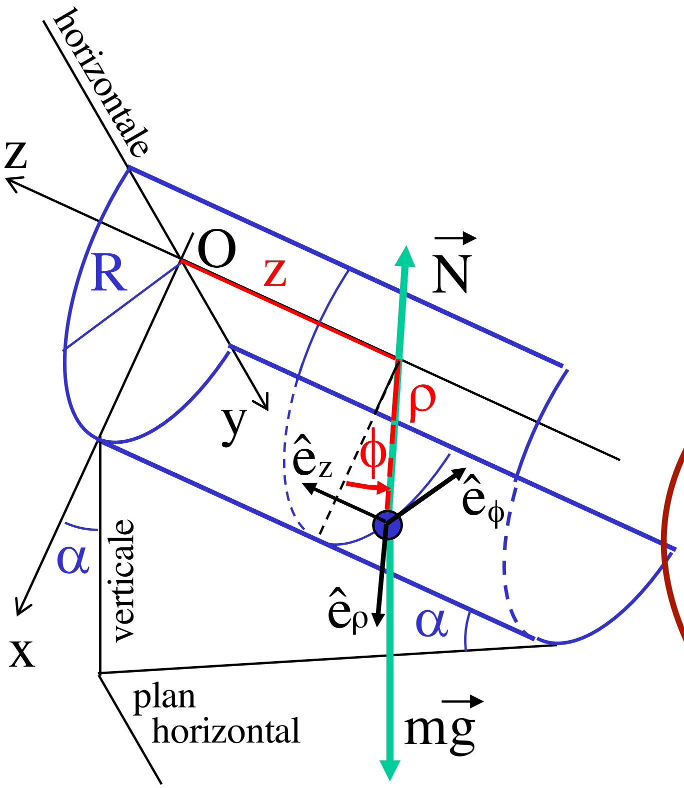


- Projection de la loi de Newton sur les axes du repère mobile

$$\left\{\begin{array}{rcl} -mR\dot{\phi}^2 & = & mg\cos\alpha\cos\phi - N \\ mR\ddot{\phi} & = & -mg\cos\alpha\sin\phi \\ m\ddot{z} & = & -mg\sin\alpha \end{array}\right.$$



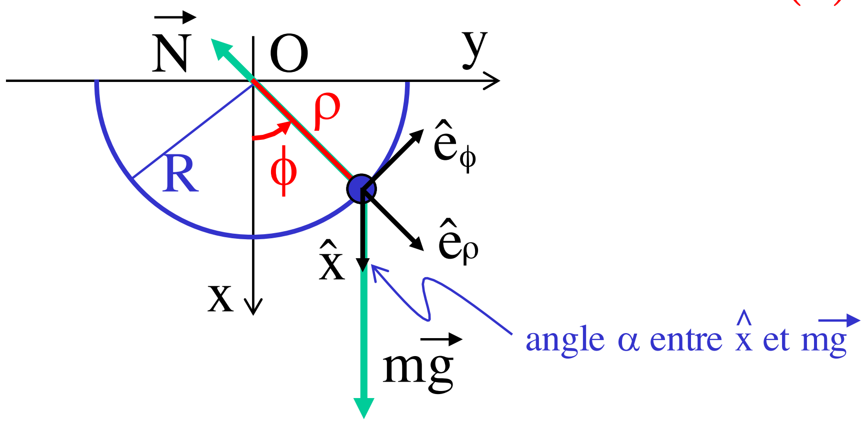
Exemple 1 : point matériel dans un tube cylindrique



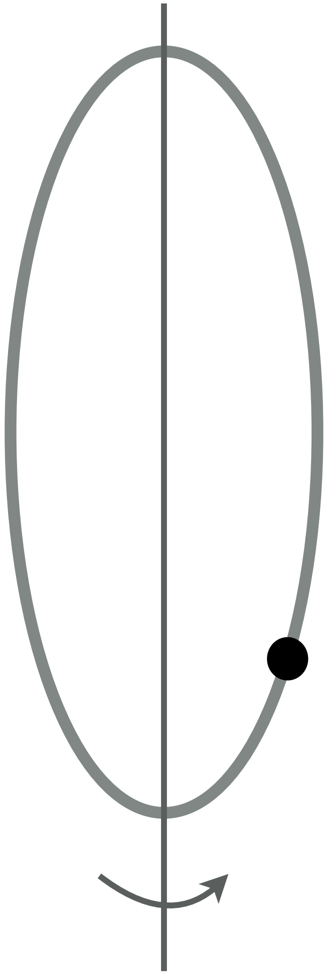
- Projection de la loi de Newton sur les axes du repère mobile

$$\left\{\begin{array}{rcl} -mR\dot{\phi}^2 & = & mg\cos\alpha\cos\phi - N \\ mR\ddot{\phi} & = & -mg\cos\alpha\sin\phi \\ m\ddot{z} & = & -mg\sin\alpha \end{array}\right.$$

- $z(t)$: mouvement uniformément accéléré
- $\phi(t)$: mouvement d'un pendule
- $N(t)$: détermine la réaction du support



Exemple 2 : masse sur un anneau en rotation



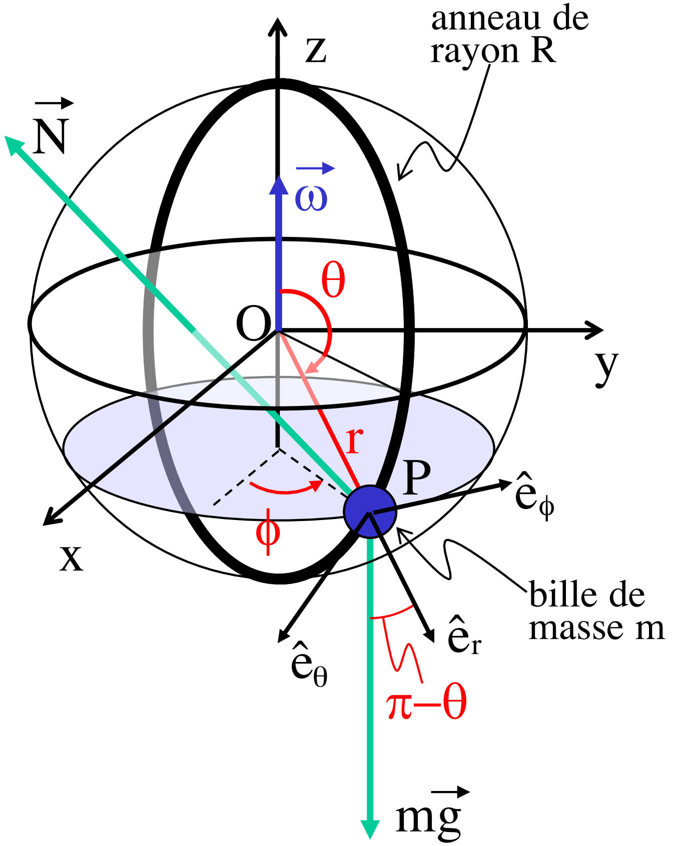
Un point matériel de masse *m* peut glisser sans frottement le long d'un anneau circulaire, lui-même en rotation uniforme (vitesse angulaire constante) autour d'un axe verticale passant par son diamètre (voir figure).

a) Calculer les **positions d'équilibre** du point matériel en fonction des paramètres du problème.

b) Discuter la **stabilité** des équilibres (stables ou instables) et calculer la **fréquence de petites oscillations** autour de ces points

1. Lire attentivement l'énoncé et appréhender le problème
2. Définir le(s) **système(s)** ; faire un **dessin**
3. Choisir un **référentiel** (= observateur)
4. Identifier (et dessiner) les **forces extérieures** appliquées sur chaque système
5. Lister les **lois applicables** et choisir la stratégie de résolution
6. Choisir les **variables de position** (= coordonnées)
7. Ecrire les **équations du mouvement** ; les résoudre
8. **Vérifier** la(les) solution(s) (dimensions et cas limites)

Exemple 2 : masse sur un anneau en rotation



- Référentiel immobile, le laboratoire
- Repère lié au référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$
- Anneau en rotation à vitesse

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

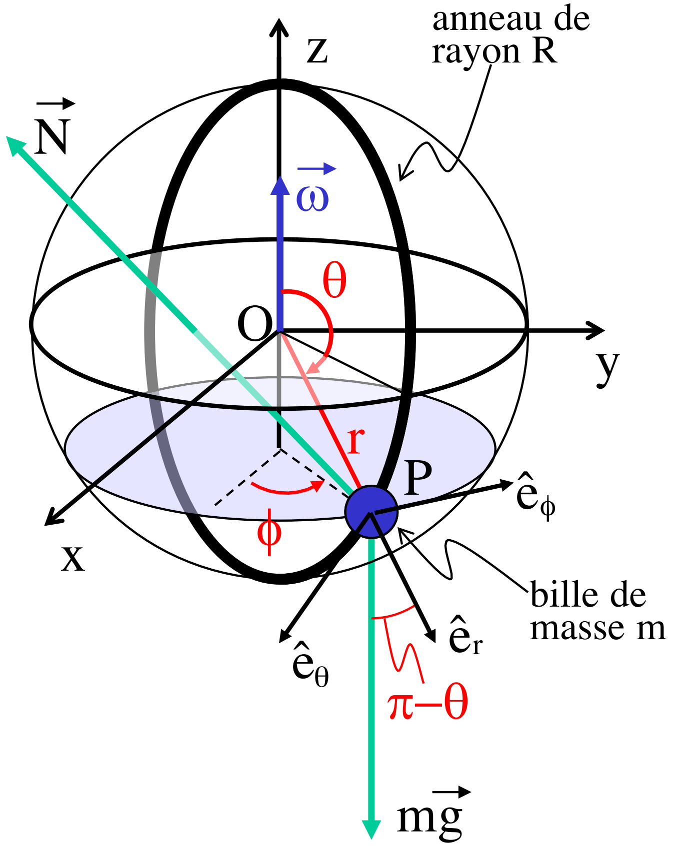
- Repère lié à la bille $O\hat{e}_r\hat{e}_\theta\hat{e}_\phi$
- Coordonnées de la bille $r,\ \theta,\ \phi$
- Forces: pesanteur, liaison
- Gravité dans le repère $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

$$m\vec{g} = -mg\hat{z}$$

- Force de liaison perp. à la courbe

$$\vec{N} \cdot \hat{e}_\theta = 0$$

Exemple 2 : masse sur un anneau en rotation



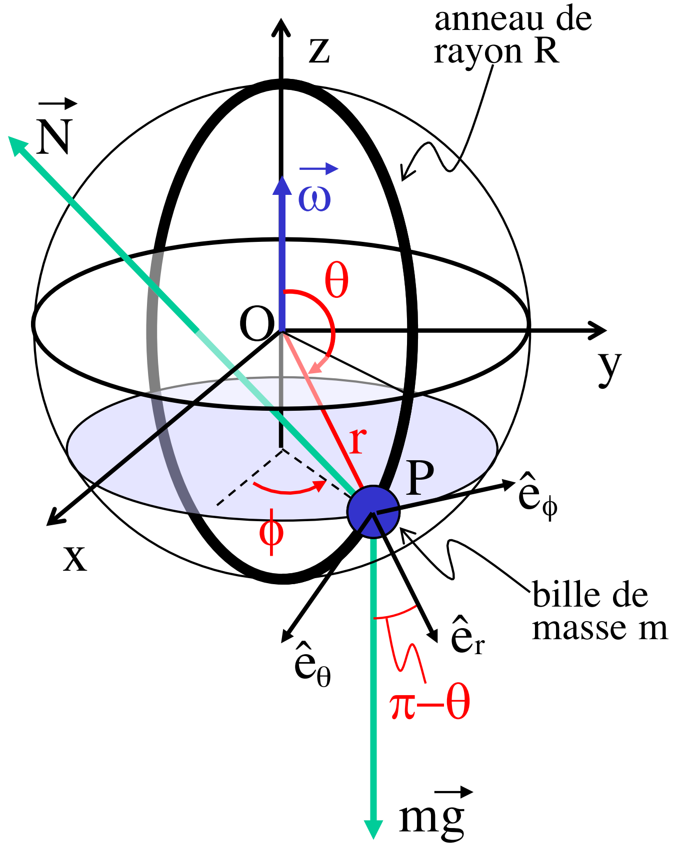
- Contraintes: $r = R,\ \dot{r} = 0,\ \ddot{r} = 0$
  $\dot{\phi} = \omega,\ \ddot{\phi} = 0$

- On recherche la position d'équilibre:
  $$\theta = \text{Const.},\ \dot{\theta} = 0$$

- *Attention: il s'agit d'un équilibre dans le repère en rotation, il y a donc toujours des forces en jeu et une accélération normale !*

Exemple 2 : masse sur un anneau en rotation

Voir solution détaillée manuscrite



- Projection des forces dans le repère $O\hat{e}_r\hat{e}_\theta\hat{e}_\phi$

$$\left\{\begin{array}{rcl} m\vec{g} & = & -mg\cos\theta\hat{e}_r + mg\sin\theta\hat{e}_\theta \\ \vec{N} & = & N_r\hat{e}_r + N_\phi\hat{e}_\phi \end{array}\right.$$

- 2eme loi de Newton

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

- Projections sur les trois axes, prenant en compte les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} N_r - mg\cos\theta & = & -mR\omega^2\sin^2\theta \\ mg\sin\theta & = & -mR\omega^2\sin\theta\cos\theta \\ N_\phi & = & 0 \end{array}\right.$$

- Trois cas possibles:

$\sin\theta = 0, \pi$ ou $\cos\theta = -\dfrac{g}{R\omega^2}$ si $|\omega| \geqslant \sqrt{\dfrac{g}{R}}$