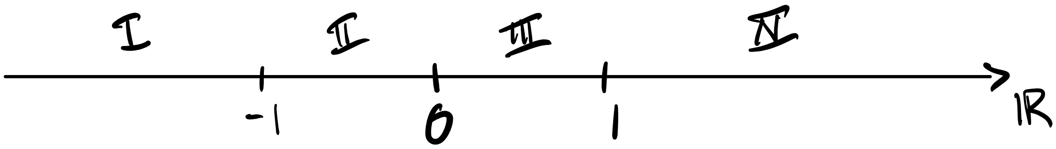
À maîtriser : <u>résolution d'inéquations</u>.

Décrire $A = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \neq 1 \text{ et } \frac{1}{1-|x|} < 1 \}$ à l'aide d'intervalles



I] Si $x < -1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1+x} < 0$ donc $]-\infty, -1[\subset A$
($x < -1$ donc $x + 1 < 0$)

II] Si $-1 < x \leqslant 0$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1+x} \geqslant 1$ donc $x \notin A$

III] Si $0 \leqslant x < 1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-x} \geqslant 1$ donc $x \notin A$

IV] Si $x > 1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-x} < 0$ donc $x \in A$

V] Si $x = -1$ ou $x = 1$ alors $|x| = 1$ donc $x \notin A$

En conclusion : $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

fin cours 06/10

Chapitre 2 : Nombres Complexes

On peut définir $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni d'opérations + et · suivantes :

$$+ : ((a,b),(c,d)) \mapsto (a+c, b+d)$$

$$\cdot : ((a,b),(c,d)) \mapsto (ac - bd, ad + bc)$$

Représentation cartésienne

On a : $(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0)$

$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0)$

Ceci permet d'identifier $(x, 0) \in \mathbb{C}$ avec $x \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

<u>Notation</u> : $i = (0,1)$ "unité imaginaire"

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

Pour tout $z = (a,b) = a\cdot\underbrace{(1,0)}_{=1} + b\underbrace{(0,1)}_{=i}$

$$= a + ib$$

On dit que $z = a+ib$ est la représentation cartésienne de z.

Prenons $z_1 = a+ib$ et $z_2 = c+id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

On retrouve les règles de calcul définies plus haut :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d) \\ z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + i(ad+bc) \end{cases}$$

2.1 Définitions additionnelles

Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Le <u>conjugué</u> de z est $\bar{z} = a - ib$

<u>Propriétés</u> : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\bar{\bar{z}} = z$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

<u>Partie réelle</u> : $\mathrm{Re}(z) = a = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

<u>Partie imaginaire</u> : $\mathrm{Im}(z) = b = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

<u>Module</u>: $|z| := \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$

En effet $z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

On a $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ (vérifier)

2.2 Inverse d'un nombre complexe

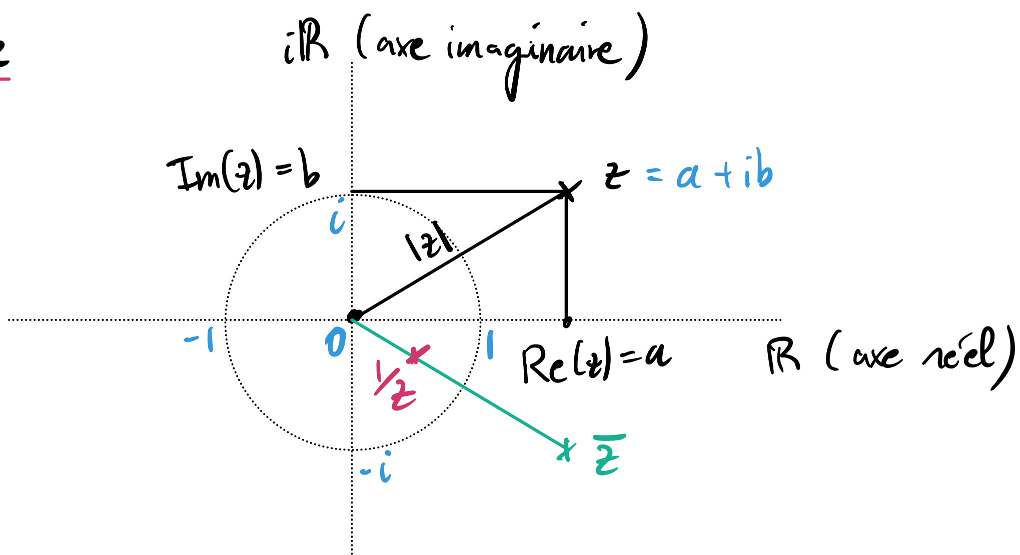
Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ on a $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \iff z \cdot \left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = 1$

Donc $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}} = z^{-1}$

Remarque : $|z^{-1}| = \left|\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + i\,\underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

2.3 Plan complexe



2.4 Formules d'Euler et de Moivre

On définit l'exponentielle complexe, pour $z = a+ib \in \mathbb{C}$ par

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

En particulier pour $\varphi \in \mathbb{R}$, on a

$$\underline{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)} \qquad \text{(Formule d'Euler)}$$

Remarque : $|e^{i\varphi}| = \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1$

Propriétés : $\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$ (vérifier)

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ (admis)

On en déduit $(e^{z})^{n} = e^{n \cdot z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$
(aussi vrai avec $n \in \mathbb{Z}$)

Formule de Moivre (on prend $z = i\varphi$) :

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

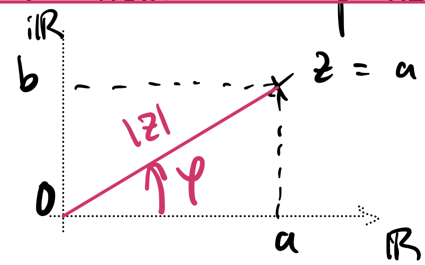
Par exemple, pour $n = 2$:

$$\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2$$
$$= \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 + 2i\cos\varphi\sin\varphi$$

On obtient : $\begin{cases} \cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 \\ \sin(2\varphi) = 2\cos\varphi\sin\varphi \end{cases}$

Remarque : $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$

2.5 Forme polaire d'un nombre complexe



Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (c'est à dire $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

$z = |z| \cdot \dfrac{z}{|z|} = |z| \cdot \alpha$ avec $\alpha = \dfrac{z}{|z|}$. On a $|\alpha| = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$

α de module $1 \Rightarrow \alpha = \cos(\varphi) + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$
(déterminé à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$)

Def : le nombre $\varphi \in]-\pi, \pi]$ est appelé l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$. On note $\varphi = \arg(z)$.

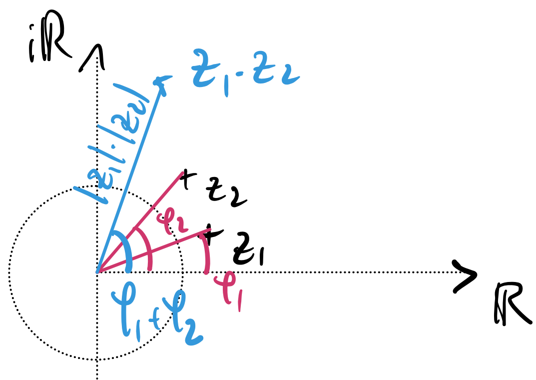
Remarques :

- pour $z \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\arg(z) = 0$
- pour $z \in \mathbb{R}_-^*$, on a $\arg(z) = \pi$
- pour $z = a + ib$ avec $a > 0$ on a
  $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (c'est à dire $\tan \varphi = \frac{b}{a}$)
- Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, on a

$z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$ ($\leftarrow$ écriture sous forme polaire)

$z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$

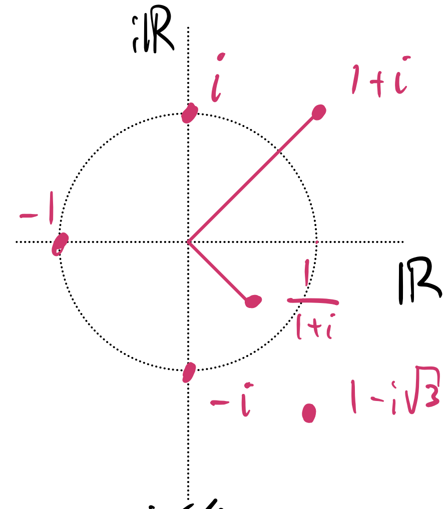
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



- Soit $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Alors l'inverse de $z = re^{i\varphi}$ est :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r^2} \cdot r e^{-i\varphi} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$

2.6 Exemples



1) $i = 1 \cdot e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}$

2) $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$

3) $-i = 1 \cdot e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/2}$

4) $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

5) $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\pi/4}$ (en appliquant la formule de l'inverse).

$= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}_{1/\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\pi/4}$

6) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\pi/3}$

7) $(1-i\sqrt{3})^{30} = 2^{30} e^{(-i\pi/3)\cdot 30} = 2^{30} e^{-10i\pi} = 2^{30}$.

fin cours 10/10/22